Modelado de sistemas mecánicos de orden superior - caso de estudio sistema de suspensión vehicular

Modeling of higher order mechanical systems – vehicle suspension system case study

Adriana del Pilar Noguera Torres[1]
Universidad Nacional Abierta y a Distancia, Colombia

Resumen

El modelado de sistemas dinámicos implica la aplicación de procesos físicos y matemáticos que permitan la descripción de un sistema, planta o proceso variante en el tiempo por medio de representaciones matemáticas y gráficas en el dominio del tiempo, dominio de la frecuencia o por su representación matricial por espacios de estados cuando se trata de modelado matemático, y por medio de diagramas de flujo o diagramas de bloques cuando se trata de representación gráfica. Para modelar un sistema se debe tener presente el tipo de naturaleza del mismo, es decir, si se trata de un sistema mecánico, eléctrico, hidráulico, entre otros, y con esta información obtener las ecuaciones que describen el comportamiento esperado del sistema. Una vez descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias se procede a representar en el dominio deseado, dando cumplimiento con criterios de linealidad y homogeneidad, para finalmente comprobar su respuesta gráfica ante estímulos externos esperando respuestas positivas en términos de estabilidad, controlabilidad y observabilidad del sistema. Finalmente, modelar un sistema dinámico es la base para la selección y aplicación de técnicas de control que se requieran en los procesos para obtener una mejor respuesta del mismo ante cualquier estímulo externo al cual sea sometido el proceso.

Palabras clave: modelado, sistemas LTI, sistemas mecánicos, función de transferencia, espacios de estados.

[1] Ingeniera electrónica, especialista en Automatización Industrial, magister en Tecnología de Información, docente ocasional tiempo completo, UNAD. https://orcid.org/0000-0002-4945-4324 /
adriana.noguera@unad.edu.co

Abstract

The modeling of dynamic systems implies the application of physical and mathematical processes that allow the description of a system, plant or process that varies in time by means of mathematical and graphical representations in the time domain, frequency domain or by its matrix representation. by state spaces when it comes to mathematical modeling, and by means of flow charts or block diagrams when it comes to graphical representation. To model a system, the type of nature of the system must be taken into account, that is, if it is a mechanical, electrical, hydraulic system, among others, and with this information obtain the equations that describe the expected behavior of the system. Once described by ordinary differential equations, it proceeds to represent it in the desired domain, fulfilling the criteria of linearity and homogeneity, to finally check its graphic response to external stimuli, expecting positive responses in terms of stability, controllability and observability of the system. Finally, modeling a dynamic system is the basis for the selection and application of control techniques that are required in the processes to obtain a better response to any external stimulus to which the process is subjected.

Keywords: Modeling, LTI systems, mechanical systems, transfer function, space state.

1. Introducción

El modelado de sistemas es fundamental para el diseño y análisis en ingeniería, por ende, el conocer su funcionamiento y aplicar sus principios en situaciones teóricas que se asemejen a las reales permite analizar de forma matemática y verificar el comportamiento de los modelos planteados haciendo uso de herramientas y procedimientos teóricos válidos e imprescindibles dentro del área de sistemas dinámicos.

El modelado en espacios de estados es un método que permite la representación de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de forma matricial, tiene grandes ventajas respecto a otras metodologías de modelado matemático y su representación, resulta muy útil sobre todo cuando se trabaja con sistemas que tienen más de una entrada y una salida (sistemas MIMO por sus siglas en inglés) ya que permite y facilita su análisis, además es ideal para su aplicación en sistemas lineales invariables en el tiempo (LTI por sus siglas en inglés) pero también puede ser aplicado a sistemas variantes y adicional a esto es posible obtener la dinámica de las diferentes variables de estado que intervienen de manera rápida y sencilla.

Asimismo, la representación por espacios de estado permite llegar a funciones de transferencia que describen el comportamiento del sistema dependiendo de las necesidades del ingeniero, pudiendo obtener su resultado ya sea con ayuda de software o aplicando teoría simple de algebra matricial.

2. Metodología

Teniendo en cuenta que cuando se habla de metodología se hace referencia a la estrategia de investigación seleccionada para dar respuesta a las preguntas de investigación y depende tanto de éstas como del marco teórico de la investigación (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2014), se busca una estrategia de investigación general de índole mixta entre enfoque cuantitativo y cualitativo, tomando como referencia el nivel de complejidad y la respuesta esperada siempre que se desea realizar procesos investigativos y en especial los que se enfocan en verificaciones de procesos aplicados en entornos reales.

Una vez definida la metodología, se procede a recopilar la información relacionada con el modelado de sistemas mecánicos y las posibles técnicas a utilizar para determinar las expresiones matemáticas y las leyes físicas que describen el comportamiento dinámico de este tipo de sistemas.

La metodología propuesta para modelar un sistema mecánico se desarrolla por etapas, teniendo en cuenta en primera instancia la teoría propuesta para el análisis y modelado de sistemas mecánicos propuestos por Katsuhiko Ogata en *Ingeniería de control moderna*, donde establece que un sistema se denomina dinámico si su salida en el presente depende de una entrada en el pasado (Ogata, 2010). Adicionalmente, se efectúa una revisión del estado del arte de modelado de sistemas dinámicos aplicando lo que establecen Zanker y Ryan en la ingeniería de sistemas complejos (Zanker & Ryan, 2005) donde dan a conocer diferentes herramientas que aplican la administración de proyectos técnicos complejos en ingeniería. A continuación, se relacionan las etapas definidas para el proceso de modelado de sistemas mecánicos de acuerdo con el desarrollo propuesto:

1. Revisión del estado del arte
2. Análisis físico del sistema mecánico aplicando Leyes de Newton e interpretando su dinámica por medio del diagrama de cuerpo libre.
3. Planteamiento matemático para obtener las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que modelan el sistema mecánico.
4. Aplicar la teoría de representación de espacios de estados para obtener el arreglo matricial que determina la dinámica del sistema.
5. Uso de herramientas de software especializado para determinar la correlación entre la representación matricial de espacios de estados y la función de transferencia que representa el sistema.
6. Modelar el sistema en su representación gráfica por medio de diagrama de bloques y evaluar su respuesta ante un escalón unitario como señal de perturbación.

3. Discusión y resultados

En la revisión del estado del arte se determinan los métodos a utilizar para obtener los modelos matemáticos que permiten modelar el sistema dinámico ya sea en el dominio del tiempo, dominio de la frecuencia y/o su representación matricial por medio de espacios de estados. En este proceso se evidencia que los sistemas se analizan de acuerdo a su naturaleza física teniendo en cuenta que pueden existir modelos mecánicos traslacionales, mecánicos rotacionales, eléctricos, electromecánicos, hidráulicos, térmicos, entre otros, que aplican leyes físicas diferentes para su interpretación y aplicación de principios físicos y matemáticos para su respectivo modelado (Dorf & Bishop, 2011).

El caso de estudio propuesto corresponde al análisis dinámico de un sistema de suspensión vehicular de acuerdo con la representación propuesta en la Figura 1.

Figura 1. Sistema de suspensión vehicular.

De acuerdo con la metodología utilizada, se procede a representar el sistema en su análisis mecánico por medio del diagrama de cuerpo libre teniendo en cuenta las fuerzas que se presentan sobre las masas del sistema, teniendo en cuenta que una de ellas corresponde a la llanta mientras que la otra corresponde al chasis del automotor, como se evidencia en la Figura 2.

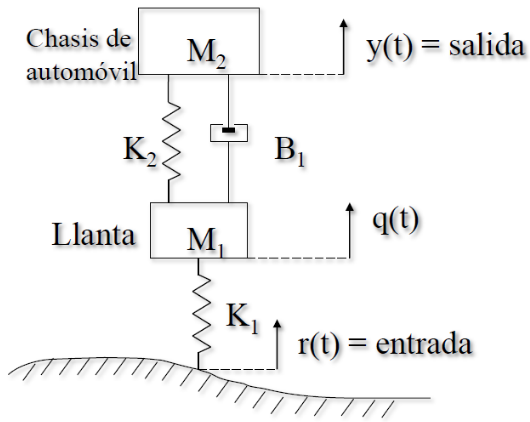

Figura 2. Modelo mecánico para análisis de cuerpo libre.

El análisis de los sistemas mecánicos se realiza aplicando lo que indica la segunda Ley de Newton teniendo en cuenta que la aceleración en cualquier cuerpo rígido es directamente proporcional al desequilibrio de fuerza que actué sobre éste e inversamente proporcional a la masa del cuerpo (Nise, 2007). Este análisis debe realizarse para cada masa que interviene en el sistema de suspensión vehicular considerando las diferentes fuerzas que actúa sobre cada una de ellas y sus respectivas direcciones, obteniendo las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que representan el modelo matemático del sistema en el dominio del tiempo:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{k_1}{m_1}r - \frac{b_1}{m_1}\frac{dq}{dt} - \frac{(k_2+k_1)}{m_1}q + \frac{b_1}{m_1}\frac{dy}{dt} + \frac{k_2}{m_1}y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} =- \frac{b_1}{m_2}\frac{dy}{dt} - \frac{k_2}{m_2}y + \frac{b_1}{m_2}\frac{dq}{dt} + \frac{k_2}{m_2}q$$

Es importante aclarar que los sistemas modelados en el dominio del tiempo pueden representarse en dominio de la frecuencia y/o espacios de estados siempre y cuando sus EDO sean lineales, es decir que se represente con coeficientes constantes, cumplan con el teorema de superposición y siempre respondan de igual forma ante cualquier estímulo en su entrada. Para el caso de estudio, el sistema se representa por EDO que satisfacen estos criterios, por tanto, se procede a obtener su función de transferencia por medio de su representación en espacios de estados.

El modelado por espacios de estados es una representación matemática que permite obtener el modelo de un sistema dinámico en el dominio del tiempo (Ogata, 1987), las variables de estado son la representación moderna que se tiene para describir el comportamiento de los sistemas dinámicos empleados en diferentes sistemas físicos (García, 2005). Los espacios de estado se representan matricialmente por 4 elementos:

)

Ecuación de estado	Ecuación de salida
del sistema	del sistema

Esta representación está compuesta por matrices identificadas por las letras A, B, C y D que corresponden a:

En el caso de estudio se tienen dos EDO con exponente 2 cada una de ellas, lo que indica que se trata de un sistema de orden 4 y cuya representación matricial corresponde a:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{V}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ V_1(t) \\ X_2(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} [u(t)]$$

Para modelar el sistema por su representación matricial por espacios de estados es necesario realizar un cambio de variables para lo cual se tienen las siguientes ecuaciones:

Ecuación 1

Ecuación 2

Ecuación 3

Ecuación 4

Teniendo las ecuaciones organizadas y con cambio de variables, se procede a organizar los términos correspondientes de las EDO en los arreglos matriciales aplicando operaciones básicas de matrices, obteniendo así las matrices que modelan el sistema del caso de estudio:

+

Matriz de Estado

+

Matriz de Salida

Para determinar la función de transferencia a partir de la representación matricial por espacios de estados se hace uso de la herramienta de software especializado Matlab para hallar la correlación entre los dos métodos de modelado de sistemas. Este proceso se realiza mediante el comando ss2tf que permite convertir las ecuaciones de estado previamente registradas en función de transferencia, como se evidencia a continuación:

```
>> m1=1;
>> m2=2;
>> k1=3;
>> k2=4;
>> b1=5;
>> A=[0 1 0 0;-(k2+k1)/m1 -b1/m1 k2/m1 b1/m1;0 0 0 1;k2/m2 b1/m2 -k2/m2 -b1/m2];
>> B=[0;k1/m1;0;0];
>> C=[0 0 1 0];
>> D=0;
>> [num den]=ss2tf(A,B,C,D);
>> TF=tf(num,den)

TF =

              7.5 s + 6
  ---------------------------------
  s^4 + 7.5 s^3 + 9 s^2 + 7.5 s + 6

Continuous-time transfer function.
```

Figura 3. Correlación espacios de estados y función de transferencia con Matlab.

Para verificar que las funciones corresponden entre sí, se representa el sistema de forma gráfica mediante diagramas de bloques con la herramienta Simulink obteniendo que el comportamiento gráfico de los dos modelos obtenidos representa correlación entre sí:

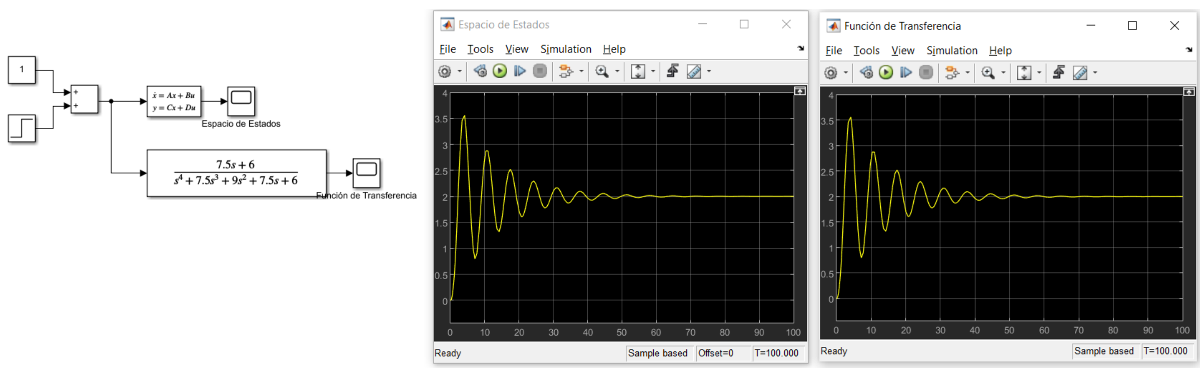

Figura 4. Modelado por diagrama de bloques usando Simulink.

4. Conclusiones

El método de modelar o representar sistemas por medio de espacio de estados surge de la necesidad de trabajar con sistemas complejos, aquellos en los cuales es necesario de bastantes procedimientos matemáticos para representarlos y en donde se tienen un amplio número de entradas y salidas o en aquellos sistemas en los cuales el comportamiento varía con el tiempo, utilizando directamente lo que se conoce como *estado del sistema*.

Estos estados del sistema representan los cambios más pequeños que se pueden evidenciar en las variables de estado de un sistema, que corresponden al subconjunto más pequeño con el cual se puede representar un estado dinámico completo en un determinado instante, resaltando que estas variables de estado deben cumplir condición de linealidad, ser independientes entre sí, sin ningún tipo de combinación lineal con otras variables de estado que pueda tener un mismo sistema.

La representación matricial por espacio de estados corresponde a la forma de modelar matemáticamente cualquier sistema físico y/o dinámicos que se encuentra representado por medio de un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales y que describen un comportamiento físico conocido.

Referencias

Angée, S., Lozano, S., Montoya-Munera, E., Ospina Arango, J. & Tabares, M. (2018). Towards animproved asum-dm process methodology for cross-disciplinary multi-organization big data& analytics projects. *13th international conference*, 51-60.

Dorf, R., & Bishop, R. (2011). *Modern control systems.* London: Pearson.

García, I. (2005). *Teoría de estabilidad y control.* Lleida: Universitat de Lleida.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill Interamericana.

Nise, N. (2007). *Control Systems Engineering.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering.* New Jersey: Prentice Hall.

Ogata, K. (1987). *Dynamic of systems.* New Jersey: Prentice Hall.

Zanker, R., & Ryan, M. (2005). *Engineering a system : Managing complex technicalprojects.* Canberra: Argos Press.