

# **Cálculo del coeficiente de transmisión en cristales fotónicas 1D mediante el método de la matriz de transferencia**

## **Transmission coefficient calculation in 1D photonic crystals by using the transfer matrix method**

Juan Esteban Tapias<sup>1</sup>

Luz Esther González Reyes<sup>2</sup>

*Universidad Nacional Abierta y a Distancia / Universidad de Ibagué,  
Colombia*

### **Resumen**

Este trabajo presenta una introducción matemática al campo de los cristales fotónicos. Se expone en detalle el método de la matriz de transferencia para el cálculo de modos guiados en un sistema multicapa 1D compuesto por capas alternadas de dos diferentes materiales. Este método permite estimar los rangos de frecuencia permitida y prohibida en los que puede propagarse la luz al interior de una estructura. El formalismo aquí presentado es ampliamente usado en el campo de dispositivos ópticos para la transmisión de datos e información.

**Palabras clave:** cristales fotónicos, método de la matriz de transferencia, coeficiente de transmisión, dispositivos optoelectrónicos.

### **Abstract**

In this work is presented a mathematical introduction to the photonic crystals field. It is explained in detail the Transfer Matrix technique for the calculation of guided modes in a 1D multilayer system composed by alternating layers of two different materials. This method allows estimating the permitted and prohibited frequency ranges in which light

---

<sup>1</sup> Escuela de Ciencias Básicas Tecnología e Ingeniería, Universidad Nacional Abierta y a Distancia. <https://orcid.org/0000-0002-7857-5678> / [juan.tapias@unad.edu.co](mailto:juan.tapias@unad.edu.co)

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Universidad de Ibagué. <https://orcid.org/0000-0002-2302-1774> / [luz.gonzalez@unibague.edu.co](mailto:luz.gonzalez@unibague.edu.co)

can propagate inside a structure. The formalism presented here is widely used in the field of optical devices for data and information transmission.

**Keywords:** Photonic crystals, Transfer matrix method, Transmission coefficient, optoelectronic devices.

## 1. Introducción

Después de que en 1987 Yablonovitch y Sajeev ((Yablonovitch, 1987; Sajeev, 1987) propusieron los cristales fotónicos (PhCs), muchos trabajos experimentales y teóricos han sido dedicados al estudio de las propiedades físicas de estos cristales, estructuras caracterizadas por la variación periódica del índice de refracción y en consecuencia de la constante dieléctrica, tales estructuras definen rangos de frecuencia y direcciones en las cuales la propagación de la onda electromagnética es prohibida o permitida. Las bandas de frecuencia a través de las cuales la propagación de las ondas electromagnéticas no es permitida son llamadas "band gaps fotónicos" (PBG, por sus siglas en inglés: photonic band gaps) (Joannopoulos, Johnson, Winn, & Meade, 1995). En esencia, un cristal fotónico es una estructura periódica artificial caracterizada por una estructura de bandas fotónicas, que pueden ser modificadas para controlar los rangos de frecuencia o longitud de onda de propagación de la luz (Joannopoulos, Johnson, Winn & Meade, 1995).

En consecuencia, la capacidad de sintonizar la transmisión de luz que brindan los cristales fotónicos abre una nueva perspectiva en el campo de las comunicaciones ópticas (Choyon & Chowdhury, 2022), dispositivos optoelectrónicos (Duc Lee & Thuat, 2020), circuitos fotónicos integrados (Fu, Sun, Zhou, & Tian, 2020) y energías fotovoltaicas (Zhou, Xu, Tan, Liu, & Wan, 2022), entre otros.

El propósito de este trabajo es brindar una introducción matemática al campo de los cristales fotónicos (González Reyes, 2010). Este breve texto está dirigido principalmente a estudiantes e investigadores que desean adquirir una introducción matemática al tema de los modos guiados y guías de onda en cristales fotónicos, ampliamente usados en el campo de dispositivos ópticos para la transmisión de datos e información.

## 2. Metodología

### 2.1 Descripción del cristal fotónico 1D estudiado

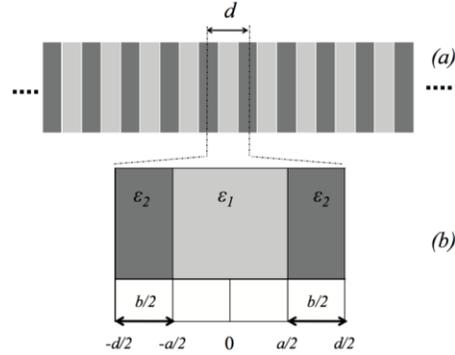


Figura 1. Diagrama esquemático del cristal fotónico 1D estudiado.

El cristal estudiado consta de una estructura periódica 1D compuesta por capas alternadas de diferentes materiales tales como superconductor y ferroeléctrico, Fig. 1(a). Se define el origen en el centro de la primera capa (con constante dieléctrica  $\epsilon_1$  y permeabilidad magnética  $\mu_1$ ) de espesor  $a$  con periodicidad  $d = a + b$ , donde  $b$  es el espesor de la capa del segundo material (con constante dieléctrica  $\epsilon_2$  y permeabilidad magnética  $\mu_2$ ) como se ilustra en la Fig. 1(b); se considera al eje  $z$  como la dirección de crecimiento del cristal, así como la dirección de propagación.

### 2.2 Técnica de la matriz transferencia

Con el fin de estudiar la propagación de la luz en cristales fotónicos, debemos partir de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes (Joannopoulos, Johnson, Winn, & Meade, 1995). Partiendo de la ecuación diferencial para el campo eléctrico asociada a este caso, donde  $n(z) = \sqrt{\epsilon(z)\mu(z)}$  y  $Z(z) = \sqrt{\mu(z)}/\sqrt{\epsilon(z)}$  son el índice de refracción y la impedancia respectivamente, para cada material (Cavalcanti, de Dios-Leyva, Reyes-Gómez & Oliveira 2007), tenemos

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{n(z)Z(z)} \frac{dE}{dz} \right] = -\frac{n(z)\omega^2}{Z(z)c^2} E \quad (1)$$

Para un PC compuesto de capas alternadas de dos diferentes materiales, la ecuación (1) debe ser resuelta asumiendo la continuidad del campo

eléctrico y de su primera derivada,  $\frac{1}{n(z)Z(z)} \frac{dE}{dz}$ , lo que significa que la función de dos componentes

$$\psi(z) = \left( E(z) \frac{1}{n(z)Z(z)} \frac{dE}{dz} \right), \quad (2)$$

es continua a través del PC. Esta condición puede ser convenientemente escrita por medio de la matriz de transferencia como  $\psi(z) = M(z - z_0) \psi(z_0)$  (Markos & Soukoulis, 2008), donde

$$M(z - z_0) = \left( \begin{array}{c} \cos[k(z - z_0)] \frac{n(z)Z(z)}{k} \sin[k(z - z_0)] \\ - \frac{k}{n(z)Z(z)} \sin[k(z - z_0)] \cos[k(z - z_0)] \end{array} \right) \quad (3)$$

Nótese, que de esta expresión se ve claramente que si estoy en un punto  $z_0$  cualquiera en una de las capas, por medio de la matriz  $M(z - z_0)$  puedo desplazarme y obtener como es el vector  $\psi$  en un punto  $z$  del PC.

De acuerdo con la Figura 1(b), tomando  $z_0 = 0$  y  $z = \frac{a}{2}$ , en el medio 1 se tiene

$$\psi\left(\frac{a}{2}\right) = M_1\left(\frac{a}{2}\right) \psi(0), \quad (4)$$

con

$$M_1\left(\frac{a}{2}\right) = \left( \cos\left(\frac{k_1 a}{2}\right) \frac{n_1 Z_1}{k_1} \sin\left(\frac{k_1 a}{2}\right) - \frac{k_1}{n_1 Z_1} \sin\left(\frac{k_1 a}{2}\right) \cos\left(\frac{k_1 a}{2}\right) \right). \quad (5)$$

Para el medio 2 tomando  $z_0 = \frac{a}{2}$  y  $z = \frac{a+b}{2}$ , se obtiene

$$\psi\left(\frac{a+b}{2}\right) = M_2\left(\frac{b}{2}\right) \psi\left(\frac{a}{2}\right), \quad (6)$$

siendo

$$\psi\left(\frac{a+b}{2}\right) = M_2\left(\frac{b}{2}\right) M_1\left(\frac{a}{2}\right) \psi(0) = M_T(a, b) \psi(0) \quad (7)$$

y

$$M_2\left(\frac{b}{2}\right) = \left( \cos\left(\frac{k_2 b}{2}\right) \frac{n_2 Z_2}{k_2} \sin\left(\frac{k_2 b}{2}\right) - \frac{k_2}{n_2 Z_2} \sin\left(\frac{k_2 b}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 b}{2}\right) \right), \quad (8)$$

donde  $M_T(a, b)$  es la matriz transferencia que me conecta el medio 1 (de espesor  $a$ ) con el medio 2 (de espesor  $b$ ), conservando la continuidad de la función  $\psi$  y que se encuentra dada por:

$$M_T(a, b) = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}, \quad (9)$$

con

$$P = \cos\left(\frac{k_2 b}{2}\right) \cos\left(\frac{k_1 a}{2}\right) - \frac{n_2 Z_2 k_1}{n_1 Z_1 k_2} \operatorname{Sen}\left(\frac{k_2 b}{2}\right) \operatorname{Sen}\left(\frac{k_1 a}{2}\right), \quad (10)$$

$$Q = \frac{n_1 Z_1}{k_1} \operatorname{Sen}\left(\frac{k_1 a}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 b}{2}\right) + \frac{n_2 Z_2}{k_2} \operatorname{Sen}\left(\frac{k_2 b}{2}\right) \cos\left(\frac{k_1 a}{2}\right), \quad (11)$$

$$R = -\frac{k_2}{n_2 Z_2} \operatorname{Sen}\left(\frac{k_2 b}{2}\right) \cos\left(\frac{k_1 a}{2}\right) - \frac{k_1}{n_1 Z_1} \operatorname{Sen}\left(\frac{k_1 a}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 b}{2}\right), \quad (12)$$

$$S = \cos\left(\frac{k_2 b}{2}\right) \cos\left(\frac{k_1 a}{2}\right) - \frac{n_1 Z_1}{n_2 Z_2} \frac{k_2}{k_1} \operatorname{Sen}\left(\frac{k_1 a}{2}\right) \operatorname{Sen}\left(\frac{k_2 b}{2}\right), \quad (13)$$

donde  $k_1 = \frac{\omega}{c} |n_1|$  y  $k_2 = \frac{\omega}{c} |n_2|$ , y

$$\det|M_T| = PS - QR = 1. \quad (14)$$

Como el PC es una estructura periódica, permite definir simetrías de traslación en la cual el sistema es invariante, lo que permite hacer uso de la condición de Bloch (Markos & Soukoulis, 2008),

$$\psi(z + d) = e^{iqd} \psi(z), \quad (15)$$

donde  $d = a + b$  es el período y  $q$  es elegido en la primera zona de Brillouin (BZ) de la superred fotónica,  $-\frac{\pi}{d} \leq q \leq \frac{\pi}{d}$ .

Haciendo  $\lambda = e^{iqd}$  y  $z = -\frac{a+b}{2} = -\frac{d}{2}$  se obtiene

$$\psi\left(\frac{d}{2}\right) = \lambda \psi\left(-\frac{d}{2}\right), \quad (16)$$

con lo cual se llega finalmente a

$$\cos(qd) = PS + QR, \quad (17)$$

obteniéndose las dos relaciones equivalentes

$$\text{Sen}^2\left(\frac{qd}{2}\right) = -QR, \quad (18)$$

$$\text{Cos}^2\left(\frac{qd}{2}\right) = PS. \quad (19)$$

Las soluciones de estas dos ecuaciones tienen como resultado la relación de dispersión  $\omega = \omega(q)$  o estructura de bandas del PC.

Otra ecuación equivalente se obtiene restando (19) de (18) y usando (10)-(13)

$$\cos qd = \cos(k_1a) \cos(k_2b) - \frac{1}{2} \left( \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \sin(k_1a) \sin(k_2b). \quad (20)$$

El coeficiente de transmisión es calculado como

$$T_N = \frac{1}{1 + |M_{12}|^2} \quad (21)$$

considerando la correspondiente matriz de transferencia para N periodos, que puede ser escrita como (Markos & Soukoulis, 2008),

$$M_N = \begin{pmatrix} PU_{N-1} - U_{N-2} & QU_{N-1} \\ RU_{N-1} & SU_{N-1} - U_{N-1} \end{pmatrix} \quad (22)$$

donde  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son los elementos de la matriz de transferencia para un periodo,  $N = 1$ . Aquí, la función  $U_N = U_N(q)$  que es definida como  $U_N = \frac{\sin((N+1)qd)}{\sin qd}$ , son los polinomios de Chebyshev de segundo orden.

### 3. Discusión

Las ecuaciones (18), (19) y (20) corresponden a las soluciones analíticas de la estructura de bandas de un cristal fotónico 1D. Las soluciones de dichas ecuaciones representan los rangos de frecuencias permitidas en las que la transmisión de luz se presenta en el cristal. La ecuación (21), permite estimar el porcentaje de luz que es transmitido en un cristal fotónico y por ende la cantidad de información que puede ser transmitida en la estructura.

La forma más simple de analizar estos sistemas es imaginar una onda plana propagándose a través del material y considerar la suma de múltiples reflexiones y refracciones que ocurren en cada interferencia (Joannopoulos, Johnson, Winn, & Meade, 1995), dando como resultado las regiones de frecuencia permitida y prohibida.

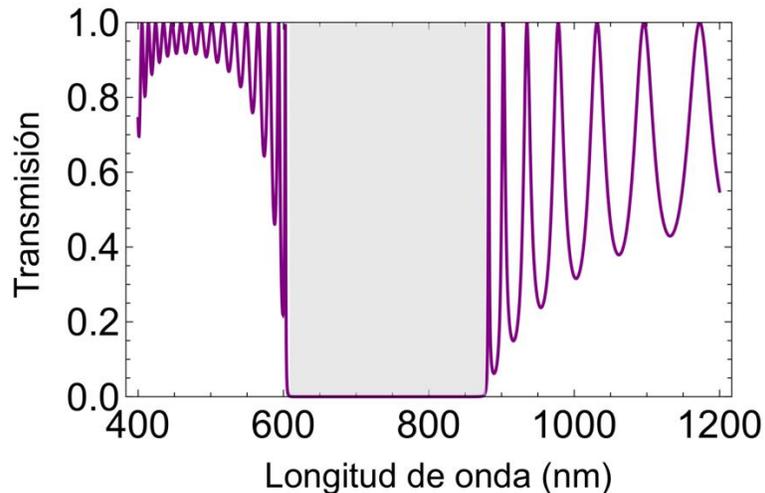


Figura 2. Espectro de transmisión a incidencia normal de un cristal fotónico 1D compuesto por capas alternadas de GaAs ( $\epsilon_1 = 13$ ) y aire ( $\epsilon_2 = 1$ ). Cada capa tiene un espesor de 90 nm. La región sombreada de gris corresponde a la región del espectro en que la luz no se propaga a través de la estructura, esto es, entre 600 y 870 nm, aproximadamente.

La Figura 2 muestra el espectro de transmisión de un cristal fotónico 1D compuesto por capas alternadas de GaAs y aire, cuyas constantes dieléctricas son  $\epsilon_1 = 13$  y  $\epsilon_2 = 1$ , respectivamente (González Reyes, 2010). Cada capa con un espesor de 90 nm cada una. El área sombreada de gris corresponde a los rangos de alta reflectancia en los que la luz no se propaga y las bandas de color violeta indican las regiones de alta transmisión donde la radiación pasa a través de la estructura.

#### 4. Conclusiones

Se realiza una revisión del método de la matriz de transferencia, ampliamente utilizado en el cálculo de la estructura de bandas fotónica y el coeficiente de transmisión de cristales fotónicos 1D. Esperamos que este escrito sirva de guía a aquellos investigadores y estudiantes interesados en iniciar su investigación en el campo de dispositivos ópticos para la transmisión de datos e información.

## Referencias

- Cavalcanti, S. B., de Dios-Leyva, M., Reyes-Gómez, E. & Oliveira, L. E. (2007). Photonic band structure and symmetry properties of electromagnetic modes in photonic crystals. *Physical Review E*, 75, 026607. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.026607>
- Choyon, A. & Chowdhury, R. (2022). Multifunctional chalcogenide (As<sub>2</sub>S<sub>3</sub>, As<sub>2</sub>Se<sub>3</sub>) dual-core photonic crystal fiber with elliptical air-hole for mid-IR optical communications: Design and analysis. *Optik - International Journal for Light & Electron Optics*, 258, 1. [https://journals.scholarsportal.info/details/00304026/v258icomplete/nfp\\_mc2s3amocdaa.xml](https://journals.scholarsportal.info/details/00304026/v258icomplete/nfp_mc2s3amocdaa.xml)
- Duc Lee, N. & Thuat, N.-T. (2020). Simulation of coupling optical modes in 1D photonic crystals for optoelectronic applications. *Journal of Science: Advanced Materials and Devices*, 5, 142-150.
- Fu, Z., Sun, F., Zhou, J. & Tian, H. (2020). Highly Sensitive 1 × 8 Parallel Multiplexing of Ultra-Compact Integrated 1D Photonic Crystal Sensor Array Based on Silicon-on-Insulator Platform. *IEEE Journal*, edsee.9046788.
- Joannopoulos, J., Johnson, S., Winn, J. & Meade, R. (1995). *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*. New Jersey: Princeton University Press.
- Markos, P. & Soukoulis, C. M. (2008). *Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials*. New Jersey: Princeton University Press.
- Sajeev, J. (1987). Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Physical Review Letters*, 58(23). [https://www.physics.utoronto.ca/~john/john/p2486\\_1.pdf](https://www.physics.utoronto.ca/~john/john/p2486_1.pdf)
- Yablonovitch, E. (1987). Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics. *Physical Review Letters*, 58. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.2059>
- Zhou, L., Xu, Y., Tan, S., Liu, M. & Wan, Y. (2022). Simulation of Amorphous Silicon Carbide Photonic Crystal Absorption Layer for Solar Cells. *Crystals* 12(5), 665. <https://doi.org/10.3390/cryst12050665>

