Generalizaciones del operador de Lamé-Navier en análisis de clifford

Generalizations of the Lamé-Navier operator in clifford analysis

[1]Daniel Alfonso Santiesteban, [2]Diego Esteban Gutierrez Valencia, [3]Ricardo Abreu Blaya, [4]Yudier Peña Pérez

[1,2,3,4]Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas. Chilpancingo de los Bravo, México

Recibido: 10/12/2023 Aprobado: 28/3/2024

Resumen

El Análisis de Clifford ha ayudado a interpretar eficientemente muchas de las ecuaciones de la Física Matemática, y en particular de la Mecánica de Medios Continuos. En el presente artículo se estudia una generalización natural del clásico operador de Lamé-Navier sobre álgebras de Clifford. El uso de operadores de Dirac construidos con bases ortonormales arbitrarias conduce a una gran variedad de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de interés matemático y físico. Primeramente, se estudian varias propiedades esenciales como la invariancia sobre campos k-vectoriales y la elipticidad. Además, se presenta una reescritura del sistema de Lamé-Navier en términos de los módulos longitudinal y transversal. Finalmente, se considera el problema de Dirichlet asociado a funciones que anulan dicho operador y se determina la condición que provoca que este problema, en general, sea mal planteado en el sentido de Hadamard.

Palabras clave: operadores de Dirac, invariancia, elipticidad, sistema de Lamé-Navier, problema de Dirichlet.

Abstract

Clifford Analysis has helped to effectively interpret many of the equations of Mathematical Physics, and in particular of the Mechanics of Continuous Media. In this paper we study a natural generalization of the classical Lamé-Navier operator on Clifford algebras. The use of Dirac operators constructed with arbitrary orthonormal bases leads to a great variety of systems of partial differential equations of mathematical and physical interest. First, several essential properties such as invariance over k-vector fields and ellipticity are studied. In addition, a rewriting of the Lamé-Navier system in terms of the longitudinal and transverse modules is presented. Finally, the Dirichlet problem associated with functions that cancel the generalized Lamé-Navier operator is considered, and we determine the condition that causes the ill-posedness of problem in the Hadamard sense.

Key words: *Dirac operators, invariance, ellipticity, Lamé-Navier system, Dirichlet problem.*

Citación: Alfonso Santiesteban, D., Gutierrez Valencia , D. E., Abreu Blaya, R. ., & Peña Pérez, Y. (2025). Generalizaciones del operador de Lamé-Navier en análisis de Clifford. Publicaciones E Investigación, 18(1). https://doi.org/10.22490/25394088.7583

[1] danielalfonso950105@gmail.com – https://orcid.org/0000-0003-0248-3942
[2] diegogutierrez@uagro.mx – https://orcid.org/0000-0003-4285-5720
[3] rabreublaya@yahoo.es – https://orcid.org/0000-0003-1453-7223
[4] ypenap88@gmail.com – https://orcid.org/0000-0002-3700-1053

https://doi.org/10.22490/25394088.7583

1. Introducción

El operador de Lamé-Navier es un operador diferencial parcial de segundo orden que aparece en diversos modelos empleados en la Mecánica de Medios Continuos, como por ejemplo en la divergencia del tensor de tensiones de Cauchy para un medio isotrópico lineal[11][38]. Para sólidos hiperelásticos, las ecuaciones de estado estacionario que representan el desplazamiento consisten en el operador de Lamé-Navier igualado con la fuerza externa que actúa sobre el cuerpo[7][17]. Estas ecuaciones son también conocidas como sistema de Lamé-Navier y se deben a la ley de elasticidad de Hooke[20]. Para fluidos compresibles, el operador aparece en las importantes ecuaciones de momento de Navier-Stokes[24]. En el contexto del Análisis Vectorial, este operador de Lamé-Navier $\mathcal{L}_{\{\lambda,\mu\}}$ actuando sobre campos vectoriales $\vec{u}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, para $m \geq 2$, tiene la siguiente forma explícita: $\mathcal{L}_{\{\lambda,\mu\}}$

$$\mathcal{L}_{\{\lambda,\mu\}}[\vec{u}] \coloneqq \mu\Delta\vec{u} + (\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}), \quad (1)$$

donde μ y λ son los llamados parámetros de Lamé[25][32][35]. Estas constantes satisfacen las condiciones para la elipticidad fuerte de $\mathcal{L}_{\{\lambda,\mu\}}$:

$$\mu > 0, \quad 2\mu + \lambda > 0. \qquad (2)$$

Como el módulo de masa $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ es usualmente positivo, entonces la segunda restricción en (2) se sustituye por la siguiente condición más fuerte:

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \qquad (3)$$

con el objetivo de aportar un sentido físico realista. Un aporte realizado por el alemán Heinz Hopf implica que las funciones que anulan al operador $\mathcal{L}_{\{\lambda,\mu\}}$ no alcancen un módulo máximo sobre un determinado dominio abierto del espacio m-dimensional. Debido a este hecho, el conocido problema de Dirichlet para el sistema de Lamé-Navier tiene solución única. Este último resultado se remonta a la obra del físico prusiano Gustav Robert Kirchhoff[18].

Las álgebras de Clifford tienen innumerables aplicaciones, como operar de una manera efectiva con las rotaciones en un espacio de alta dimensión mediante los llamados grupos espinoriales, donde un ejemplo particular es el grupo de Lorentz de la Relatividad Especial[10][21]. El operador de Dirac, construido sobre el álgebra de Clifford real $\mathbb{R}_{0,m}$ con generadores $e_1, e_2, \dots, e_m$, es definido como $\underline{\partial_x} \coloneqq \sum_{i=1}^m e_i\partial_{x_i}$, donde ∂_{x_i} denota a $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Dicho operador es un caso especial de operador de Atiyah-Singer-Dirac actuando sobre un fibrado espinorial[9]. En las últimas décadas, el estudio de este operador ha sido el tema central en muchas áreas de la Matemática. La consideración de propiedades locales de las soluciones del operador de Dirac ha conducido a una teoría de funciones, comúnmente conocida como Análisis de Clifford. Moreno García *et al.*[30] establecieron una reescritura del sistema de Lamé-Navier en términos del operador de Dirac e introdujeron así un nuevo operador de Lamé-Navier sobre estas álgebras geométricas no conmutativas:

$$\mathcal{L}^*_{\{\lambda,\mu\}}[\vec{u}] \coloneqq \left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right)\underline{\partial_x}[\vec{u}]\underline{\partial_x} - \left(\frac{3\mu+\lambda}{2}\right)\Delta\vec{u}. \qquad (4)$$

Recientemente, Alfonso Santiesteban *et al.*[4] estudiaron una generalización de este operador (4) considerando operadores de Dirac construidos con bases ortonormales arbitrarias de $\mathbb{R}^m$: $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ y $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$. Este operador generalizado de Lamé-Navier se define como:

$$\mathcal{L}^{\varphi,\psi}_{\alpha,\beta}[u] \coloneqq \alpha\underline{\partial}^{\varphi}[u]\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}[u], \qquad (5)$$

donde $\alpha = \frac{\mu+\lambda}{2}$, $\beta = \frac{3\mu+\lambda}{2}$, y

$$\underline{\partial}^{\varphi} = \sum_{i=1}^m \varphi_i\partial_{x_i}.$$

Una de las bondades de considerar bases ortonormales o conjuntos estructurales en el sistema de Lamé-Navier es que permite obtener una amplia gama de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que podrían tener importancia dentro de la Matemática y la Física. La hipótesis anterior es factible ya que se han obtenido soluciones del sistema clásico de Lamé-Navier en presencia de una fuerza de volumen constante que son a la vez soluciones de un sistema generalizado de L amé-Navier homogéneo:

$$\alpha\underline{\partial}^{\varphi}[u]\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}[u] = 0. \qquad (6)$$

El objetivo de este trabajo es estudiar algunas propiedades esenciales del operador $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$, así como analizar el problema de Dirichlet asociado a las funciones que lo anulan.

2. Preliminares

Sea $e_1, e_2, \ldots, e_m$ la base ortonormal estándar de $\mathbb{R}^m$, sujeta a las relaciones multiplicativas:

$$e_i^2 = -1,\ e_i e_j = -e_j e_i,\ i,j = 1,2,\ldots,m,\ i < j.$$

El espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$ queda inmerso en el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ generada por la anterior base dentro del cuerpo de los números reales. Cualquier elemento $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito como $a = \sum_A a_A e_A$, donde a_A son constantes reales y A recorre todos los posibles conjuntos ordenados $A = \{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le i_m\}$ o $A = \emptyset$, y $e_A = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}$, $e_\emptyset = e_0 = 1$. Por tanto, cualquier $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ tiene la representación

$$a = [a]_0 + [a]_1 + [a]_2 + \cdots + [a]_m,$$

donde $[\cdot]_k$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{0,m}$en el subespacio de k-vectores definido por

$$\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} = \{a \in \mathbb{R}_{0,m}: a = \sum_{|A|=k} a_A e_A,\ \ a_A \in \mathbb{R}\}. \qquad (7)$$

Es costumbre identificar a $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}_{0,m}^{(0)}$, los conocidos escalares en $\mathbb{R}_{0,m}$, y $\mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}_{0,m}^{(1)} \cong \mathbb{R}^m$, el conjunto de vectores. Los elementos en $\mathbb{R}_{0,m}^{(0)} \oplus \mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$ son llamados paravectores, mientras que los elementos en $\mathbb{R}_{0,m}^{(m)}$ son nombrados pseudoescalares[9][10][14]. Para un vector ν y un k-vector Y_k, su producto νY_k se divide en un (k-1)-vector y un (k+1)-vector, concretamente,

$$\nu Y_k = [\nu Y_k]_{k-1} + [\nu Y_k]_{k+1},$$

donde

$$[\nu Y_k]_{k-1} = \frac{1}{2}[\nu Y_k - (-1)^k Y_k \nu]$$

y

$$[\nu Y_k]_{k+1} = \frac{1}{2}[\nu Y_k + (-1)^k Y_k \nu].$$

Los productos interior y exterior entre ν y Y_k son denotados por $\nu \cdot Y_k = [\nu Y_k]_{k-1}$ y $\nu \wedge Y_k = [\nu Y_k]_{k+1}$, respectivamente. La conjugación en $\mathbb{R}_{0,m}$ es definida como la involución $a \to \overline{a}$ para la cual $\overline{e_i} = -e_i$, $i = 1, \ldots, m$. Una norma $||.||$ sobre $\mathbb{R}_{0,m}$ es definida por la expresión $||a||^2 = [a\overline{a}]_0$. Nótese que para $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ se tiene que $||\underline{x}|| = |\underline{x}|$, coincidiendo con la usual norma euclidiana en $\mathbb{R}^m$.

En este trabajo se consideran funciones definidas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ y que toman valores en $\mathbb{R}_{0,m}$. Estas funciones pueden ser escritas como $f = \sum_A f_A e_A$, donde f_A son funciones con valores reales. A partir de este momento, se usará el término de campos k-vectoriales para hacer alusión a aquellas funciones que toman valores específicamente sobre el espacio de k-vectores. Existe una dualidad entre esta teoría de campos k-vectoriales con la teoría de k-formas diferenciables[9]. Las nociones de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad de una función con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$ se introducen usualmente por componentes. La letra griega Ω se usará para designar a un conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.

El operador de Dirac construido con el conjunto $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\} \subset \mathbb{R}^m$ se define como

$$\underline{\partial}^\varphi := \varphi_1 \partial_{x_1} + \varphi_2 \partial_{x_2} + \cdots + \varphi_m \partial_{x_m},$$

y este factoriza al operador de Laplace como $-\underline{\partial}^\varphi \underline{\partial}^\varphi = \Delta$ si y solo si φ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. El primero que probó este hecho fue Nõno[34] y debido a Shapiro[36][37] a dicha base se le denomina: *conjunto estructural*. Por tanto, el Análisis de Clifford es un refinamiento del Análisis Armónico, donde el operador de Dirac es el operador diferencial por excelencia de esta teoría de funciones φ-hiperholomorfas[13][15][33]. Debido a su naturaleza vectorial, la acción de este operador de Dirac sobre un campo k-vectorial F_k está dada por

$$\underline{\partial}^\varphi F_k = \underline{\partial}^\varphi \cdot F_k + \underline{\partial}^\varphi \wedge F_k,$$

donde

$$\underline{\partial}^\varphi \cdot F_k := \frac{1}{2}\left[\underline{\partial}^\varphi F_k - (-1)^k F_k \underline{\partial}^\varphi\right] = \left[\underline{\partial}^\varphi F_k\right]_{k-1}$$

y

$$\underline{\partial}^\varphi \wedge F_k := \frac{1}{2}\left[\underline{\partial}^\varphi F_k + (-1)^k F_k \underline{\partial}^\varphi\right] = \left[\underline{\partial}^\varphi F_k\right]_{k+1}.$$

Esta teoría, en sí misma, no es una gran novedad, ya que puede reducirse mediante una transformación ortogonal al caso estándar. A pesar de ello, el panorama cambió completamente por el estudio de algunos operadores importantes que implican un par de bases ortonormales diferentes. La flexibilidad introducida por los conjuntos estructurales permite buscar nuevas perspectivas en varias líneas de investigación relativas a las propiedades de mapeo de Π-operadores, transformaciones conformes y descomposiciones aditivas de funciones armónicas[1][5][12][13][19].

Una función que toma valores en $\mathbb{R}_{0,m}$, definida y diferenciable en Ω, es llamada φ-hiperholomorfa por la derecha (φ-hiperholomorfa por la izquierda) si $f\underline{\partial}^{\varphi} = 0$ ($\underline{\partial}^{\varphi} f = 0$) en Ω[15][16][27]. Las funciones que son a la vez φ-hiperholomorfas por la izquierda y por la derecha en Ω se nombrarán como φ-hiperholomorfas por ambos lados y su espacio funcional será denotado por $\mathcal{B}_{\varphi}(\Omega)$. Se introducirán las siguientes clases de funciones dos veces continuamente diferenciables:

$$\mathfrak{I}_{\varphi,\psi}(\Omega) = \{\mathrm{u} \in \mathrm{C}^2(\Omega) \colon \underline{\partial}^{\varphi}[u]\underline{\partial}^{\psi} = 0\}, \qquad (8)$$

$$\mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega) = \{\mathrm{u} \in \mathrm{C}^2(\Omega) \colon \underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}[u] = 0\}. \qquad (9)$$

Las funciones que pertenecen a $\mathfrak{I}_{\varphi,\psi}(\Omega)$ son conocidas con el nombre de (φ,ψ)-inframonogénicas[3]. En el caso de que $\varphi = \psi = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, la clase $\mathfrak{I}_{\varphi,\psi}(\Omega)$ se reduce al espacio $\mathfrak{I}(\Omega)$ de funciones inframonogénicas[22][23][28][29][31][40]. Cabe mencionar que cuando $\varphi = \psi$, la clase $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega)$, compuesta por las funciones (φ,ψ)-armónicas[6], coincide con el espacio $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones armónicas en Ω. El espacio $\mathfrak{I}_{\varphi,\psi}(\Omega) \cap \mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega)$ coincide con los desplazamientos universales del sistema generalizado de Lamé-Navier (6)[4]. Es decir, aquellos desplazamientos que no dependen de los parámetros α y β. La Figura 1 muestra una interpretación gráfica de estos espacios.

Fuente: Elaboración propia

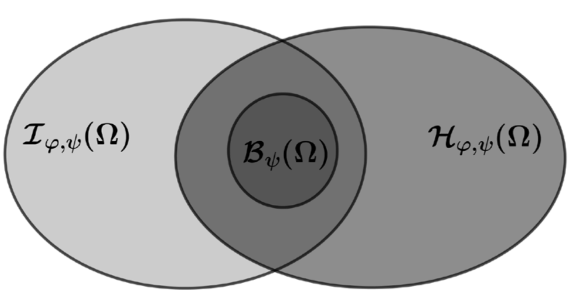

Figura 1: Los espacios de funciones (φ,ψ)-inframonogénicas, (φ,ψ)-armónicas y ψ-hiperholomorfas por ambos lados sobre un dominio Ω.

3. Invariancia sobre campos k-vectoriales

Un hecho característico del clásico operador de Laplace, y también del operador sándwich $\underline{\partial}^{\varphi}(.)\underline{\partial}^{\varphi}$, es que ambos transforman campos k-vectoriales en campos k-vectoriales[4]. Por ende, una función será armónica o (φ,φ)-inframonogénica si y solo si cada una de sus k-partes lo son. Esta invariancia sobre el espacio de campos k-vectoriales es una de las interesantes y pocas semejanzas entre el conocido operador de Laplace y este esotérico operador sándwich que emerge sobre las álgebras de Clifford. Sin embargo, un cálculo sencillo muestra que si se toma un campo k-vectorial $F_k \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)})$ entonces:

$$\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}[F_k] = \underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k + \underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k + \underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k + \underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k,$$

$$\underline{\partial}^{\varphi}[F_k]\underline{\partial}^{\psi} = (-1)^k\big(\underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k - \underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k - \underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k + \underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k\big).$$

Como $\underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k \in C(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}^{(k-2)})$ y $\underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k \in C(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}^{(k+2)})$, entonces estos operadores generalizados no mantienen la invariancia sobre el espacio de k-vectores, a menos que los conjuntos estructurales sean equivalentes y se implique que $\underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k = 0$ y $\underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k = 0$. En particular, para campos k-vectoriales (φ,ψ)-armónicos y (φ,ψ)-inframonogénicos se tiene lo siguiente:

$$F_k \in \mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k = 0, \\ \underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k + \underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k = 0, \\ \underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k = 0, \end{cases}$$

$$F_k \in \mathfrak{I}_{\varphi,\psi}(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k = 0, \\ \underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k - \underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k = 0, \\ \underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k = 0. \end{cases}$$

Por tanto, el operador generalizado de Lamé-Navier $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$ mapea campos k-vectoriales en funciones que toman valores en $\mathbb{R}_{0,m}^{(k-2)} \oplus \mathbb{R}_{0,m}^{(k)} \oplus \mathbb{R}_{0,m}^{(k+2)}$:

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}[F_k] = [(-1)^k\alpha + \beta](\underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k + \underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \wedge F_k) + [(-1)^{k+1}\alpha + \beta](\underline{\partial}^{\varphi} \wedge \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k + \underline{\partial}^{\varphi} \cdot \underline{\partial}^{\psi} \cdot F_k).$$

De la relación anterior, se obtiene que

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}[F_k]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\partial}^{\varphi}\cdot\underline{\partial}^{\psi}\cdot F_k=0, \\ [(-1)^k\alpha+\beta]\underline{\partial}^{\varphi}\cdot\underline{\partial}^{\psi}\wedge F_k+[(-1)^{k+1}\alpha+\beta]\underline{\partial}^{\varphi}\wedge\underline{\partial}^{\psi}\cdot F_k=0, \\ \underline{\partial}^{\varphi}\wedge\underline{\partial}^{\psi}\wedge F_k=0. \end{cases} \tag{10}$$

Cuando k es par entonces la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}[F_k]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\partial}^{\varphi}\cdot\underline{\partial}^{\psi}\cdot F_k=0, \\ M\underline{\partial}^{\varphi}\cdot\underline{\partial}^{\psi}\wedge F_k+\mu\underline{\partial}^{\varphi}\wedge\underline{\partial}^{\psi}\cdot F_k=0, \\ \underline{\partial}^{\varphi}\wedge\underline{\partial}^{\psi}\wedge F_k=0, \end{cases} \tag{11}$$

donde M es el llamado módulo de onda P (módulo longitudinal o constreñido). Así mismo, cuando k es impar se obtiene entonces:

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}[F_k]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\partial}^{\varphi}\cdot\underline{\partial}^{\psi}\cdot F_k=0, \\ \mu\underline{\partial}^{\varphi}\cdot\underline{\partial}^{\psi}\wedge F_k+M\underline{\partial}^{\varphi}\wedge\underline{\partial}^{\psi}\cdot F_k=0, \\ \underline{\partial}^{\varphi}\wedge\underline{\partial}^{\psi}\wedge F_k=0. \end{cases} \tag{12}$$

Existen dos tipos de ondas sísmicas corporales en los sólidos: las ondas de presión (ondas P) y las ondas de cizalladura. Peculiarmente, las reescrituras (11) y (12) ofrecen directamente ambos módulos elásticos que influyen en el tipo de onda en cuestión. Se debe recordar que μ es el segundo parámetro de Lamé (módulo transversal o de cizalladura) que caracteriza la deformación del material elástico lineal e isotrópico cuando influyen tensiones cortantes sobre este[32]. Como caso particular de estas nuevas reescrituras, el sistema clásico de Lamé-Navier en presencia de una fuerza de volumen $\vec{f}$ toma la siguiente forma:

$$\mu\underline{\partial}_{\underline{x}}\cdot\underline{\partial}_{\underline{x}}\wedge\vec{u}+M\underline{\partial}_{\underline{x}}\wedge\underline{\partial}_{\underline{x}}\cdot\vec{u}=\vec{f},$$

usando el lenguaje de las álgebras de Clifford.

4. Elipticidad fuerte

El concepto de elipticidad de operadores diferenciales surge con el propósito de hallar una propiedad que caracterice a aquellos operadores que se asemejan o generalizan, en cierto modo, al clásico Laplaciano. Por ello, el ejemplo ilustrativo de operador fuertemente elíptico es este operador de Laplace (o su negativo, dependiendo de la convención que se use)[8][39]. El operador necesita ser de orden par para que esta condición sea por lo menos una opción. En este trabajo se utilizará la premisa de la misma teoría que asume a $-\Delta$ como un operador fuertemente elíptico, considerando la definición del símbolo principal de un operador de orden 2k con el factor multiplicativo $(-1)^k$.

El operador de Dirac es un operador de primer orden débilmente elíptico y este puede representarse como una matriz antisimétrica operacional de orden 2^m en estas álgebras[5]. Mediante la regla de Leibniz se arriba a que cada sumando del determinante del símbolo principal del operador es una potencia par. Por tanto, este símbolo será invertible para valores no nulos, provocando así la elipticidad débil del operador[26]. La composición de operadores débilmente elípticos es débilmente elíptico. Los operadores $\underline{\partial}^{\varphi}(.)\underline{\partial}^{\psi}$ y $\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}(.)$ se conforman por la composición de dos operadores de Dirac y, por ende, ambos son débilmente elípticos. Sin embargo, en general será visto que estos operadores no son fuertemente elípticos. A continuación se muestra un análisis algebraico del operador bidimensional $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$.

Sea $\psi=\{\psi_1,\psi_2\}$ un conjunto estructural de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathbb{R}_{0,2}$ el álgebra de Clifford generada por ψ. Las reglas básicas de multiplicación son dadas por

$$\psi_1^2=\psi_2^2=-1,\quad \psi_1\psi_2=-\psi_2\psi_1.$$

Cualquier elemento $a\in\mathbb{R}_{0,2}$ puede ser escrito como $a=a_0+a_1\psi_1+a_2\psi_2+a_3\psi_1\psi_2,\ \ a_i\in\mathbb{R}\ \forall i\in\{0,1,2,3\}$. El cambio de ψ a otro conjunto estructural φ está dado por las fórmulas:

$$\varphi_1=c_{11}\psi_1+c_{12}\psi_2,\qquad \varphi_2=c_{21}\psi_1+c_{22}\psi_2,$$

donde la matriz

$$\mathcal{M}_{\psi,\varphi}^{(1)}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

es llamada la matriz de transición de la base ψ a la base φ. La ortonormalidad de las bases fuerza a la matriz $\mathcal{M}_{\psi,\varphi}^{(1)}$ a ser ortogonal y entonces todas las posibles matrices de transición son de la forma:

$$\mathcal{M}_{\psi,\varphi}^{(1)}=\begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

o

$$\mathcal{M}_{\psi,\varphi}^{(1)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & -c_1 \end{pmatrix},$$

donde $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Tomando en cuenta que $\mathbb{R}_{0,2} = \mathbb{R}_{0,2}^{(0)} \oplus \mathbb{R}_{0,2}^{(1)} \oplus \mathbb{R}_{0,2}^{(2)}$, se pueden obtener también las dos matrices de la base $\{1, \psi_1, \psi_2, \psi_1\psi_2\}$ a la base $\{1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1\varphi_2\}$ de todo el espacio $\mathbb{R}_{0,2}$:

$$\mathcal{M}_{\psi,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o

$$\mathcal{M}_{\psi,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si se identifica una función $f = f_0 + f_1\psi_1 + f_2\psi_2 + f_{12}\psi_1\psi_2$ que toma valores en $\mathbb{R}_{0,2}$ con el vector $f_\psi := (f_0, f_1, f_2, f_{12})^T$, entonces la acción del operador $\underline{\partial}^{\psi}$ por la izquierda puede ser interpretada como el producto matricial siguiente:

$$\underline{\partial}^{\psi} f = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{x_1} & -\partial_{x_2} & 0 \\ \partial_{x_1} & 0 & 0 & \partial_{x_2} \\ \partial_{x_2} & 0 & 0 & -\partial_{x_1} \\ 0 & -\partial_{x_2} & \partial_{x_1} & 0 \end{pmatrix} f_\psi.$$

Similarmente, para la acción del operador de Dirac por la derecha, se tiene:

$$f\underline{\partial}^{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{x_1} & -\partial_{x_2} & 0 \\ \partial_{x_1} & 0 & 0 & -\partial_{x_2} \\ \partial_{x_2} & 0 & 0 & \partial_{x_1} \\ 0 & \partial_{x_2} & -\partial_{x_1} & 0 \end{pmatrix} f_\psi.$$

Una observación importante es que si $\mathcal{M}_{\psi,\varphi}^{(1)}$ pertenece al grupo especial ortogonal entonces se tiene la igualdad siguiente:

$$\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}(.) = (c_2\varphi_1\varphi_2 - c_1)\Delta.$$

Por tanto, en este caso específico: $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega) \equiv \mathcal{H}(\Omega)$. El operador $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$ tendrá la forma matricial:

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi} f$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{x_1} & -\partial_{x_2} & 0 \\ \partial_{x_1} & 0 & 0 & \partial_{x_2} \\ \partial_{x_2} & 0 & 0 & -\partial_{x_1} \\ 0 & -\partial_{x_2} & \partial_{x_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{x_1} & -\partial_{x_2} & 0 \\ \partial_{x_1} & 0 & 0 & -\partial_{x_2} \\ \partial_{x_2} & 0 & 0 & \partial_{x_1} \\ 0 & \partial_{x_2} & -\partial_{x_1} & 0 \end{pmatrix} f_\psi$$
$$+ \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{x_1} & -\partial_{x_2} & 0 \\ \partial_{x_1} & 0 & 0 & \partial_{x_2} \\ \partial_{x_2} & 0 & 0 & -\partial_{x_1} \\ 0 & -\partial_{x_2} & \partial_{x_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{x_1} & -\partial_{x_2} & 0 \\ \partial_{x_1} & 0 & 0 & \partial_{x_2} \\ \partial_{x_2} & 0 & 0 & -\partial_{x_1} \\ 0 & -\partial_{x_2} & \partial_{x_1} & 0 \end{pmatrix} f_\psi.$$

El símbolo principal de $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$ cuando $\left|\mathcal{M}_{\psi,\varphi}^{(1)}\right| = 1$ está dado por la matriz:

$$\sigma_{\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}}$$
$$= \begin{pmatrix} c_1(\alpha+\beta)(\xi_1^2+\xi_2^2) & 0 & 0 & c_2(\beta-\alpha)(\xi_1^2+\xi_2^2) \\ 0 & c_1[(\alpha+\beta)\xi_1^2 + (\beta-\alpha)\xi_2^2] + 2\alpha c_2\xi_1\xi_2 & c_2[(\beta-\alpha)\xi_1^2 + (\alpha+\beta)\xi_2^2] + 2\alpha c_1\xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & -c_2[(\alpha+\beta)\xi_1^2 + (\beta-\alpha)\xi_2^2] + 2\alpha c_1\xi_1\xi_2 & -c_1[(\alpha-\beta)\xi_1^2 - (\alpha+\beta)\xi_2^2] - 2\alpha c_2\xi_1\xi_2 & 0 \\ -c_2(\alpha+\beta)(\xi_1^2+\xi_2^2) & 0 & 0 & c_1(\beta-\alpha)(\xi_1^2+\xi_2^2) \end{pmatrix}$$

El determinante del símbolo es $(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)^2(\xi_1^2+\xi_2^2)^4$, y para valores no nulos de (ξ_1, ξ_2) este es distinto de 0 acorde a las restricciones de Lamé. Se implica entonces que el operador $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$ es elíptico. La componente simétrica del símbolo $\frac{1}{2}(\sigma_{\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}} + \sigma_{\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}}^T)$ está dada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} c_1(\alpha+\beta)(\xi_1^2+\xi_2^2) & 0 & 0 & -c_2\alpha(\xi_1^2+\xi_2^2) \\ 0 & c_1[(\alpha+\beta)\xi_1^2+(\beta-\alpha)\xi_2^2]+2\alpha c_2\xi_1\xi_2 & c_2[-\alpha\xi_1^2+\alpha\xi_2^2]+2\alpha c_1\xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & c_2[-\alpha\xi_1^2+\alpha\xi_2^2]+2\alpha c_1\xi_1\xi_2 & -c_1[(\alpha-\beta)\xi_1^2-(\alpha+\beta)\xi_2^2]-2\alpha c_2\xi_1\xi_2 & 0 \\ -c_2\alpha(\xi_1^2+\xi_2^2) & 0 & 0 & c_1(\beta-\alpha)(\xi_1^2+\xi_2^2) \end{pmatrix}$$

Si se calculan los menores principales se obtiene que

$$M_1 = c_1(\alpha+\beta)(\xi_1^2+\xi_2^2),$$
$$M_2 = c_1(\alpha+\beta)(\xi_1^2+\xi_2^2)(c_1[(\alpha+\beta)\xi_1^2 + (\beta-\alpha)\xi_2^2] + 2\alpha c_2\xi_1\xi_2),$$
$$M_3 = -c_1(\alpha+\beta)(\alpha^2-\beta^2c_1^2)(\xi_1^2+\xi_2^2)^3,$$
$$M_4 = (\alpha^2-\beta^2c_1^2)^2(\xi_1^2+\xi_2^2)^4,$$

de donde se infiere que $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$ será fuertemente elíptico si $c_1 > 0$ y $c_1\beta-\alpha > 0$. Note como para el caso estándar (o sea, cuando $c_1 = 1$) se tiene que la elipticidad fuerte se debe al hecho de que $|\alpha| < \beta$. El coeficiente que acompaña al operador de Laplace en (4) es modularmente mayor que el del operador sándwich; provocando así que la elipticidad fuerte del Laplaciano se conserve en el operador de Lamé-Navier.

Ahora se procederá a hallar el símbolo principal de $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$ cuando se asume que $\left|\mathcal{M}_{\psi,\varphi}^{(1)}\right| = -1$. En este caso específico, se tendrá que el operador tendrá la forma matricial siguiente:

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi} f$$

$$= \alpha\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&c_1&c_2&0\\0&c_2&-c_1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\partial_{x_1}&-\partial_{x_2}&0\\\partial_{x_1}&0&0&\partial_{x_2}\\\partial_{x_2}&0&0&-\partial_{x_1}\\0&-\partial_{x_2}&\partial_{x_1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&c_1&c_2&0\\0&c_2&-c_1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\partial_{x_1}&-\partial_{x_2}&0\\\partial_{x_1}&0&0&-\partial_{x_2}\\\partial_{x_2}&0&0&\partial_{x_1}\\0&\partial_{x_2}&-\partial_{x_1}&0\end{pmatrix}f_\psi$$
$$+\beta\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&c_1&c_2&0\\0&c_2&-c_1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\partial_{x_1}&-\partial_{x_2}&0\\\partial_{x_1}&0&0&\partial_{x_2}\\\partial_{x_2}&0&0&-\partial_{x_1}\\0&-\partial_{x_2}&\partial_{x_1}&0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&c_1&c_2&0\\0&c_2&-c_1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\partial_{x_1}&-\partial_{x_2}&0\\\partial_{x_1}&0&0&\partial_{x_2}\\\partial_{x_2}&0&0&-\partial_{x_1}\\0&-\partial_{x_2}&\partial_{x_1}&0\end{pmatrix}f_\psi.$$

El símbolo estará dado por la matriz:

$$\sigma_{\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)[c_1(\xi_1^2-\xi_2^2)+2c_2\xi_1\xi_2] & 0 & 0 & (\alpha-\beta)[c_2(\xi_1^2-\xi_2^2)-2c_1\xi_1\xi_2] \\ 0 & c_1[(\alpha+\beta)\xi_1^2+(\alpha-\beta)\xi_2^2]+2\beta c_2\xi_1\xi_2 & c_2[(\alpha-\beta)\xi_1^2+(\alpha+\beta)\xi_2^2]+2\beta c_1\xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & c_2[(\alpha+\beta)\xi_1^2+(\alpha-\beta)\xi_2^2]-2\beta c_1\xi_1\xi_2 & c_1[(\beta-\alpha)\xi_1^2-(\alpha+\beta)\xi_2^2]-2\beta c_2\xi_1\xi_2 & 0 \\ (\alpha+\beta)[c_2(\xi_1^2-\xi_2^2)-2c_1\xi_1\xi_2] & 0 & 0 & (\beta-\alpha)[c_1(\xi_1^2-\xi_2^2)+2c_2\xi_1\xi_2] \end{pmatrix}.$$

Su determinante será el mismo calculado para el símbolo anterior y por tanto también el operador preserva la elipticidad. Evidentemente, la parte simétrica de este nuevo símbolo nunca será definida positiva para todo valor no nulo de (ξ_1, ξ_2). Por tanto, en este caso el operador de Lamé-Navier generalizado nunca será fuertemente elíptico. Cuando la dimensión m es mayor a 2, entonces es de esperar que dicho operador no se comporte como un operador fuertemente elíptico porque existen ejemplos de problemas de Dirichlet mal planteados en el sentido de Hadamard para cualesquiera conjuntos estructurales que se escojan. En la siguiente sección se tratará este tópico.

5. Problema de Dirichlet

Recientemente se probó que si existía una solución vectorial en la clase $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ para el siguiente problema de Dirichlet sobre un dominio acotado y de Lipschitz $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, $\vec{f}\in C(\partial\Omega)$:

$$\begin{cases}\mathcal{L}^*_{\{\lambda,\mu\}}[\vec{u}]=\left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right)\underline{\partial}_{\underline{x}}[\vec{u}]\underline{\partial}_{\underline{x}}-\left(\frac{3\mu+\lambda}{2}\right)\Delta\vec{u}=0 \quad en\ \Omega,\\ \vec{u}=\vec{f}\ \ en\ \ \partial\Omega,\end{cases}$$

entonces esta solución sería única[2]. Naturalmente, bajo las mismas condiciones para el dominio Ω se pueden considerar problemas de Dirichlet para sistemas generalizados de Lamé-Navier, o sea:

$$\begin{cases}\mathcal{L}^{\varphi,\psi}_{\alpha,\beta}[u]=\alpha\underline{\partial}^{\varphi}[u]\underline{\partial}^{\psi}+\beta\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}[u]=0 \quad en\ \Omega,\\ u=f\ \ en\ \ \partial\Omega.\end{cases} \tag{13}$$

El primer resultado que se obtiene es que para conjuntos estructurales arbitrarios este problema de Dirichlet (13) no necesariamente tiene solución única, de existir dicha solución. Observe el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Considere el siguiente problema de Dirichlet homogéneo sobre el dominio elipsoidal

$$\Omega=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3: 6x_1^2+x_2^2+x_3^3<1\}$$
$$\begin{cases}\mathcal{L}^{\varphi,\psi}_{0.2,0.3}[u]:=0.2*\underline{\partial}^{\varphi}[u]\underline{\partial}^{\psi}+0.3*\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}[u]=0 \quad en\ \Omega,\\ u=0\ \ en\ \ \partial\Omega.\end{cases}$$

donde los conjuntos estructurales son $\varphi=\{-e_1,e_2.e_3\}$ y $\psi=\{e_1,e_2.e_3\}$. Un cálculo directo muestra que los siguientes campos vectoriales son soluciones no nulas al problema:

$$u_1(x_1,x_2,x_3)=(6x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)e_2,$$
$$u_2(x_1,x_2,x_3)=(6x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)e_3.$$

Ahora se probará el siguiente teorema:

Teorema 1. Sea $\vec{f}\in C(\Omega)$. Si existe una solución al problema de Dirichlet siguiente:

$$\begin{cases}\mathcal{L}^{\psi,\psi}_{\alpha,\beta}[\vec{u}]:=\alpha\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi}+\beta\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]=0 \quad en\ \Omega,\\ \vec{u}=\vec{f}\ \ en\ \ \partial\Omega,\end{cases}$$

donde ψ es un conjunto estructural arbitrario, entonces dicha solución es única.

Demostración. Como es usual, basta probar que el sistema:

$$\begin{cases}\mathcal{L}^{\psi,\psi}_{\alpha,\beta}[\vec{u}]:=\alpha\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi}+\beta\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]=0 \quad en\ \Omega,\\ \vec{u}=0\ \ en\ \ \partial\Omega,\end{cases}$$

solo admite la solución trivial $\vec{u}\equiv 0$. Aplicando la fórmula de Stokes se obtiene:

$$\int_\Omega(\vec{u}(\underline{x})\,\underline{\partial}^{\psi})(\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi})d\underline{x}+\int_\Omega\vec{u}(\underline{x})\left(\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi}\right)d\underline{x}=\int_{\partial\Omega}\vec{u}(\underline{x})\,n_\psi(\underline{x})(\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi})d\underline{x},$$

$$\int_\Omega(\vec{u}(\underline{x})\,\underline{\partial}^{\psi})\left(\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\right)d\underline{x}+\int_\Omega\vec{u}(\underline{x})\left(\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\right)d\underline{x}=\int_{\partial\Omega}\vec{u}(\underline{x})\,n_\psi(\underline{x})\left(\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\right)d\underline{x},$$

donde $n_\psi(\underline{x})=\sum_{j=1}^3 n_j\psi_j$ y n_j es la j-ésima componente del vector normal unitario y exterior sobre cada punto $\underline{x}$ de la frontera. Entonces

$$\int_\Omega(\vec{u}(\underline{x})\,\underline{\partial}^{\psi})\left(\alpha\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi}+\beta\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\right)d\underline{x}+\int_\Omega\vec{u}(\underline{x})\left(\alpha\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi}+\beta\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\right)d\underline{x}=\int_{\partial\Omega}\vec{u}(\underline{x})\,n_\psi(\underline{x})\left(\alpha\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi}+\beta\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\right)d\underline{x}.$$

Por tanto,

$$\int_\Omega(\vec{u}(\underline{x})\,\underline{\partial}^{\psi})\left(\alpha\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi}+\beta\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\right)d\underline{x}=0. \tag{14}$$

Como $\vec{u}=\sum_{j=1}^3 u_j\psi_j$, se tiene que

$$(\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi})(\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi})=\left(\sum_{i=1}^3\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2-2\sum_{\substack{i,j,k\\ j\neq k}}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\psi_j\psi_k-\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2+2\sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

$$(\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi})\left(\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\right) = \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 - 2\sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Ahora se procede a analizar la parte escalar de las expresiones anteriores, y se obtiene lo siguiente:

$$[(\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi})(\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi})]_0 = \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 - \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 + 2\sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

$$\left[(\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi})\left(\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\right)\right]_0 = \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 - 2\sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Las relaciones anteriores se reducen a

$$[(\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi})(\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi})]_0 = \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 - \sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2,$$

$$\left[(\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi})\left(\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\right)\right]_0 = \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

Sustituyendo en la expresión (14) se obtiene:

$$\int_{\Omega}[(\alpha+\beta)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + (\beta-\alpha)\sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2]d\underline{x} = 0,$$

implicando que

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \\ \displaystyle\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0, \quad i\neq j. \end{cases}$$

Sea el campo vectorial $\vec{p}(x_1,x_2,x_3) = e_1u_1 + e_2u_2 + e_3u_3$. Según el sistema anterior, es natural que:

$$\nabla\cdot\vec{p} = 0,$$
$$\nabla\times\vec{p} = 0.$$

Haciendo uso de la conocida identidad:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{p}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{p}) - \Delta\vec{p},$$

se afirma que $\vec{p}$ es armónico, luego u_1, u_2 y u_3 son campos escalares armónicos. Como consecuencia, $\vec{u}$ es un campo vectorial armónico que se anula sobre la frontera. Por ende, tendrá que ser idénticamente igual a 0 y se concluye la prueba.

Surge la siguiente pregunta: ¿qué provoca que, en caso de existir solución al problema de Dirichlet (13), no se pueda asegurar la unicidad de esta? A continuación se abordará esta cuestión. Siguiendo la prueba del Teorema 1, es claro que desde el principio se pueden asumir conjuntos estructurales diferentes hasta obtener la siguiente igualdad:

$$\int_{\Omega}(\vec{u}(\underline{x})\,\underline{\partial}^{\varphi})\left(\alpha\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\psi}\vec{u}(\underline{x})\right)d\underline{x} = 0. \qquad (15)$$

Luego, la principal causa de que la unicidad de la solución se pierda para el problema de Dirichlet asociado a sistemas generalizados de Lamé-Navier es que la anterior igualdad no implica que $\vec{u}\equiv 0$. Si se analiza el Ejemplo 1, se obtendrá que

$$\int_{6x_1^2+x_2^2+x_3^2<1}(u_1(\underline{x})\,\underline{\partial}^{\varphi})\left(0.2*u_1(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi} + 0.3 * \underline{\partial}^{\psi}u_1(\underline{x})\right)d\underline{x} = 0.$$

Véase este hecho como sigue:

$$u_1(\underline{x})\underline{\partial}^{\varphi} = -2x_2 + 12x_1e_1e_2 + 2x_3e_2e_3,$$
$$u_1(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi} = -2x_2 - 12x_1e_1e_2 + 2x_3e_2e_3,$$
$$\underline{\partial}^{\psi}u_1(\underline{x}) = -2x_2 + 12x_1e_1e_2 - 2x_3e_2e_3,$$
$$(u_1(\underline{x})\underline{\partial}^{\varphi})\left(0.2*u_1(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi} + 0.3*\underline{\partial}^{\psi}u_1(\underline{x})\right) = 2x_2^2 - 14.4x_1^2 + 0.4x_3^2 - 14.4x_1x_2e_1e_2 - 1.6x_2x_3e_2e_3 - 4.8x_1x_3e_1e_3,$$
$$\int_{6x_1^2+x_2^2+x_3^2<1}(2x_2^2 - 14.4x_1^2 + 0.4x_3^2 - 14.4x_1x_2e_1e_2 - 1.6x_2x_3e_2e_3 - 4.8x_1x_3e_1e_3)\,d\underline{x} = 0.$$

Cuando se desglosa la integral anterior en sumandos, entonces los sumandos correspondientes a los términos rectangulares se hacen ceros por las simetrías de la región de integración y de dichos términos. Solo bastaría hallar la restante integral escalar:

$$\int_{6x_1^2+x_2^2+x_3^2<1}(2x_2^2 - 14.4x_1^2 + 0.4x_3^2)\,d\underline{x}.$$

Haciendo un cambio de coordenadas, se obtiene:

$$\int_{6x_1^2+x_2^2+x_3^2<1}(2x_2^2 - 14.4x_1^2 + 0.4x_3^2)\,d\underline{x} = 6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}[2\rho^2\operatorname{sen}^2(\nu)\operatorname{sen}^2(\vartheta) - 86.4\rho^2\operatorname{sen}^2(\nu)\cos^2(\vartheta) + 0.4\rho^2\cos^2(\vartheta)]\rho^2\operatorname{sen}(\vartheta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\vartheta = 0.$$

Ahora se obtendrá otra variante a la relación (15). Por la fórmula de Stokes se tiene:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\vec{u}(\underline{x})\,\underline{\partial}^\varphi)(\alpha\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^\psi)d\underline{x} &= \int_{\partial\Omega} \vec{u}(\underline{x})n_\varphi(\underline{x})\,(\alpha\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^\psi)d\underline{x} \\ &- \int_\Omega \vec{u}(\underline{x})(\alpha\underline{\partial}^\varphi\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^\psi)dx \\ &= \beta\int_\Omega \vec{u}(\underline{x})\left(\underline{\partial}^\varphi\underline{\partial}^\psi\vec{u}(\underline{x})\right)d\underline{x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\vec{u}(\underline{x})\,\underline{\partial}^\varphi)\left(\beta\underline{\partial}^\psi\vec{u}(\underline{x})\right)d\underline{x} &= \int_{\partial\Omega} (\beta\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^\varphi)n_\psi(\underline{x})\vec{u}(\underline{x})\,d\underline{x} \\ &- \int_\Omega (\beta\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^\varphi\underline{\partial}^\psi)\vec{u}(\underline{x})d\underline{x} \\ &= -\beta\int_\Omega (\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^\varphi\underline{\partial}^\psi)\vec{u}(\underline{x})d\underline{x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\vec{u}(\underline{x})\,\underline{\partial}^\varphi)\left(\alpha\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^\psi + \beta\underline{\partial}^\psi\vec{u}(\underline{x})\right)d\underline{x} &= \beta\int_\Omega [\vec{u}(\underline{x})\left(\underline{\partial}^\varphi\underline{\partial}^\psi\vec{u}(\underline{x})\right) \\ &- (\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^\varphi\underline{\partial}^\psi)\vec{u}(\underline{x})]d\underline{x} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, la relación (15) es equivalente a

$$\int_\Omega [\vec{u}(\underline{x})\left(\underline{\partial}^\varphi\underline{\partial}^\psi\vec{u}(\underline{x})\right) - (\vec{u}(\underline{x})\underline{\partial}^\varphi\underline{\partial}^\psi)\vec{u}(\underline{x})]d\underline{x} = 0. \quad (16)$$

La siguiente proposición es evidente aplicando el teorema del valor medio para integrales.

Proposición 1. Si $\vec{u}$ satisface el problema de Dirichlet

$$\begin{cases}\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}[\vec{u}] = \alpha\underline{\partial}^\varphi[\vec{u}]\underline{\partial}^\psi + \beta\underline{\partial}^\varphi\underline{\partial}^\psi[\vec{u}] = 0 \quad en\ \Omega, \\ \vec{u} = 0 \quad en\ \partial\Omega,\end{cases}$$

entonces existe un $\underline{x}\in\Omega$ tal que $(\vec{u}\underline{\partial}^\varphi)(\alpha\vec{u}\underline{\partial}^\psi + \beta\underline{\partial}^\psi\vec{u})(\underline{x}) = 0$.

Se ha demostrado que soluciones del sistema generalizado de Lamé-Navier siguen siendo biarmónicas como en el caso clásico. Un resultado débil, consecuencia del probado por Alfonso Santiesteban *et al.*(4), es el siguiente:

Proposición 2. Si $\vec{u}\in C^3(\Omega)\cap C^2(\overline{\Omega})$ satisface el problema de frontera

$$\begin{cases}\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}[\vec{u}] = \alpha\underline{\partial}^\varphi[\vec{u}]\underline{\partial}^\psi + \beta\underline{\partial}^\varphi\underline{\partial}^\psi[\vec{u}] = 0 \quad en\ \Omega, \\ \vec{u} = 0, \quad \underline{\partial}^\psi[\vec{u}] = 0, \quad \Delta\vec{u} = 0 \quad en\ \partial\Omega,\end{cases}$$

entonces $\vec{u}\equiv 0$.

Esta proposición es a veces útil para descartar posibles soluciones a un sistema generalizado. Vea el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Sean φ y ψ dos conjuntos estructurales arbitrarios, Ω la bola unitaria de $\mathbb{R}^3$, y sea el campo vectorial

$$\vec{u}(\underline{x}) = [\mathrm{sen}\left(|\underline{x}|^2 - 1\right) - |\underline{x}|^2 + 1]\psi_1.$$

Es fácil observar que $\vec{u}|_{\partial\Omega} = 0$ y al calcular $\underline{\partial}^\psi[\vec{u}]$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\underline{\partial}^\psi[\vec{u}] = -2x_1[\cos\left(|\underline{x}|^2 - 1\right) - 1] \\ + 2x_2\psi_2\psi_1[\cos\left(|\underline{x}|^2 - 1\right) - 1] \\ + 2x_3\psi_3\psi_1[\cos\left(|\underline{x}|^2 - 1\right) - 1],\end{aligned}$$

por ende $(\underline{\partial}^\psi[\vec{u}])|_{\partial\Omega} = 0$, y además,

$$\begin{aligned}\Delta\vec{u} = \Big[6\cos\left(|\underline{x}|^2 - 1\right) \\ - 4x_1^2\,\mathrm{sen}\left(|\underline{x}|^2 - 1\right) - 6 \\ - 4x_2^2\,\mathrm{sen}\left(|\underline{x}|^2 - 1\right) \\ - 4x_3^2\,\mathrm{sen}\left(|\underline{x}|^2 - 1\right)\Big]\psi_1, \\ (\Delta\vec{u})|_{\partial\Omega} = 0.\end{aligned}$$

Sin embargo, $\vec{u}\not\equiv 0$ debido al hecho que este campo vectorial no es solución de ningún sistema generalizado de Lamé-Navier en Ω, pues no cumple la condición necesaria(4): $\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi\vec{u} = 0$. Muchos interesantes ejemplos pueden ser descritos.

Conclusiones

En este artículo, se estudió una generalización del operador de Lamé-Navier en el ámbito de las álgebras de Clifford. Primeramente, se comprobó que dichos operadores generalizados utilizando conjuntos estructurales arbitrarios no mantienen invariante el espacio de campos k-vectoriales, a diferencia del clásico operador de Lamé-Navier. Además, se obtuvo una reescritura de este operador en términos de los módulos elásticos que intervienen en el tipo de onda sísmica corporal del material. Posteriormente, se evidenció que para el caso bidimensional el operador generalizado $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$ sigue siendo elíptico como para el caso estándar $\varphi = \psi = \{e_1, e_2\}$; sin embargo, la elipticidad fuerte cuando $\left|\mathcal{M}_{\psi,\varphi}^{(1)}\right| = 1$ se preservaba si se cumplían dos relaciones: $c_1 > 0$ y $c_1\beta - \alpha > 0$. Para el caso en que $\left|\mathcal{M}_{\psi,\varphi}^{(1)}\right| = -1$, el operador nunca es fuertemente elíptico. En general, para dimensiones mayores, estos operadores generalizados tampoco preservaban la elipticidad fuerte por el mero hecho de que se pueden construir ejemplos de problemas de Dirichlet homogéneos con soluciones no triviales. Por ello, en la última sección, se trató el problema de Dirichlet para sistemas generalizados de Lamé-Navier tridimensionales. Se mostró que, en general, este es un problema mal planteado en el sentido de Hadamard. Luego se probó la unicidad de la solución del problema cuando se consideraban conjuntos estructurales equivalentes en el operador $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{\varphi,\psi}$ y sobre campos vectoriales. También se encontró una condición integral que justifica el porqué estos sistemas no son únicamente solubles. Al finalizar se expusieron dos proposiciones básicas que son consecuencias de teoremas fundamentales del Análisis. El estudio realizado ofrece nuevas perspectivas para la investigación de problemas elásticos relacionados directamente con el sistema de Lamé-Navier. Como perspectivas a futuro, se pretende estudiar condiciones de Legendre-Hadamard y de Shapiro-Lopatinskij para problemas de frontera asociados a este operador de Lamé-Navier generalizado en dimensiones superiores.

AGRADECIMIENTOS

Daniel Alfonso Santiesteban y Diego Esteban Gutierrez Valencia agradecen el apoyo financiero del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) mediante una beca de estudios de posgrado (números de becario: 1043969, 962613).

REFERENCIAS

R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, A. Guzmán and U. Kähler. "On the -operator in Clifford Analysis". Journal of Mathematical Analysisand Applications. Vol. 434 No 2, pp. 1138-1159. 2016.

R. Abreu Blaya, J. A. Méndez Bermúdez, A. Moreno García and J. M. Sigarreta Almira. "Boundary value problems for the Lamé-Navier system in fractal domains". AIMS Mathematics. Vol. 6 No 6, pp. 10449-10465. 2021.

D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya and M. P. Árciga Alejandre. "On () -Inframonogenic Function in Clifford Analysis". Bull Braz Math Soc, New Series. Vol. 53 No 2, pp. 605-621. 2022. DOI: 10.1007/s00574-021-00273-6.

D. Alfonso Santiesteban, R. Abreu Blaya and M. P. Árciga Alejandre. "On a generalized Lamé-Navier system in ". Mathematica Slovaca. Vol. 72 No 6, pp. 1527-1540. 2022. DOI: 10.1515/ms-2022-0104.

D. Alfonso Santiesteban and R. Abreu Blaya. "Isomorphisms of Partial Differential Equations in Clifford Analysis". Advances in Applied Clifford Algebras. Vol. 32 No 10, pp. 1-18. 2022. DOI: 10.1007/s00006-021-01191-y.

D. Alfonso Santesteban, R. Abreu Blaya and Y. Peña Pérez. "Generalizations of harmonic functions in ". Analysis and Mathematical Physics. Vol. 12 No 10, pp. 1-12. 2022. DOI: 10.1007/s13324-021-00620-2.

J. R. Barber. "Solid mechanics and its applications". Springer, Berlin, 107. 2003.

A. V. Bitsadze. "Boundary Value Problems for Second Order Elliptic Equations". North-Holland Publishing Company, Amsterdam. Library of Congress Catalog Card Number 68-21422. 1968.

F. Brackx, R. Delanghe and F. Sommen. "Clifford analysis". Research Notes in Mathematics, 76, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston. 1982.

R. Delanghe, R. S. Krausshar and H. R. Malonek. "Differentiability of functions with values in some real associative algebras: approaches to an old problem". Bull. Soc. R. Sci. Liege 70, N0 4-6, pp. 231-249. 2001.

Y. C. Fung. "Foundations of Solid Mechanics". Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1965.

K. Gürlebeck. "On some classes of Pi-operators, in Dirac operators in analysis". (eds. J. Ryan and D. Struppa), Pitman Research Notes in Mathematics, No 394. 1998.

K. Gürlebeck, U. Kähler and M. Shapiro. "On the ∏-operator in hyperholomorphic function theory". Advances in Applied Clifford Algebras. Vol. 9 No 1, pp. 23-40. 1999.

K. Gürlebeck and W. Sproessig. “Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems”. Birkhuser AG, Basel. 1990.

K. Gürlebeck and H. M. Nguyen. “ψ-hyperholomorphic functions and an application to elasticity problems”. AIP Conference Proceedings,1648 (1), 440005. 2015.

K. Gürlebeck and H. M. Nguyen. “On ψ-Hyperholomorphic Functions and a Decomposition of Harmonics”. Hyper complex Analysis: New Perspectives and Applications. Trends in Mathematics, pp. 181-189. 2014.

D. E. Gutierrez Valencia, R. Abreu Blaya, M. P. Árciga Alejandre, Y. Peña Pérez. “On the Riemann problem in fractal elastic media”. Analysis and Mathematical Physics. Vol. 13 No 1. 2023. DOI: 10.1007/s13324-022-00764-9.

G. Kirchhoff. “Vorlesungen iiber mathematische Physik”, 1, Mechanik, 4th. ed. Leipzig, (1st ed. 1876.) 3, I4, 48, 70, I42. 1897.

R. S. Krausshar and H. R. Malonek. “A characterization of conformal mappings in by a formal differentiability condition”. Bull. Soc. R. Sci. Liege Vol. 70 No 1, pp. 35-49. 2001.

G. Lamé. “Sur les surfaces isothermes dans les corps homogènes en équilibre de temprature”. Journal de mathématiques pures et appliquées. Vol. 2, pp. 147–188. 1837.

L. W. Liu and H. K. Hong. “Clifford algebra valued boundary integral equations for three-dimensional elasticity”. Applied Mathematical Modelling. Vol. 54, pp. 246-267. 2018.

H. R. Malonek, D. Peña Peña and F. Sommen. “Cauchy-Kowalevski Theorem for Inframonogenic Functions”. Math. J. Okayama Univ. Vol. 53, pp. 167–172. 2011.

H. R. Malonek, D. Peña Peña and F. Sommen. “Fischer decomposition by inframonogenic functions”. CUBO A Mathematical Journal. Vol. 12 No 2, pp. 189–197. 2010.

L. E. Malvern. “Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium”. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ. 1969.

J. E. Marsden and T. Hughes. “Mathematical foundations of elasticity”. Dover Publications. 1983.

W. McLean. “Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations”. Cambridge University Press. 2000. ISBN: 0-521-66332-6.

I. M. Mitelman and M. V. Shapiro. “Differentiation of the Martinelli-Bochner Integrals and Notion of Hyperderivability”. Math. Nachr. Vol. 172, pp. 211–238. 1995.

A. Moreno García, T. Moreno García, R. Abreu Blaya and J. Bory Reyes. “A Cauchy integral formula for inframonogenic functions in Clifford analysis”. Adv. Appl. Clifford Algebras. Vol. 27 No 2, pp. 1147-1159. 2017.

A. Moreno García, T. Moreno García, R. Abreu Blaya and J. Bory Reyes. “Decomposition of inframonogenic functions with applications in elasticity theory”. Math Meth Appl Sci. Vol. 43, pp. 1915-1924. 2020.

A. Moreno García, T. Moreno García, R. Abreu Blaya and J. Bory Reyes. “Inframonogenic functions and their applications in three dimensional elasticity theory”. Math. Methods Appl. Sci. Vol. 41 No 10, pp. 3622-3631. 2018.

A. Moreno García, D. Alfonso Santiesteban and R. Abreu Blaya. “On the Dirichlet problem for second order elliptic systems in the ball”. Journal of Differential Equations. Vol. 364, pp. 498-520. 2023. DOI: 10.1016/j.jde.2023.03.050.

N. I. Mushelishvili. “Some basic problems of the mathematical theory of elasticity”. Groningen, The Netherland: Noordhoff. 1953.

H. M. Nguyen. “ψ-Hyperholomorphic Function Theory in R 3 : Geometric Mapping Properties and Applications”. (Habilitation Thesis). Fakultat Bauingenieurwesen der Bauhaus-Universitat. Weimar. e-pub.uni-weimar.de. 2015.

K. Nno. “On the quaternion linearization of Laplacian Δ”. Bull. Fukuoka Univ. Ed. III 35, 510. 1986.

M. H. Sadd. “Elasticity: Theory, Applications and Numerics”. Elsevier, Oxford. 2005.

M. V. Shapiro. “On some boundary value problems for functions with values in Clifford algebras”. Matem. Vesnik. Beograd. Vol. 40, pp. 321-326. 1988.

M. V. Shapiro and N. L. Vasilevski. “Quaternionic ψ-hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems”. I. ψ-hyperholomorphic function theory. Complex Variables. Vol. 27, pp. 17-46. 1998.

I. S. Sokolnikoff. “Mathematical Theory of Elasticity”. 1nd, MacGraw-Hill, New York. 1958.

M. I. Vishik. “On strongly elliptic systems of differential equations”. Mat. Sb. (N. S.). Vol. 71 No 3, pp. 615-676. 1951.

L. Wang, S. Jia, L. Luo and F. Qiu. “Plemelj formula of inframonogenic functions and their boundary value problems”. Complex Var. Elliptic Equ. 2022. DOI: 10.1080/17476933.2022.2040019.