Buscando estructuras en las soluciones de un sistema generalizado de Lamé-Navier

Looking for structures in the solutions of a generalized Lamé-Navier system

[1]**Daniel Alfonso Santiesteban**
[2]**Ricardo Abreu Blaya**
[3]**Martín Patricio Árciga Alejandre**

[1,2,3]Universidad Autónoma de Guerrero, México

Recibido: 20/10/2022 Aprobado: 22/12/2022

Dedicado a nuestros padres

Resumen

Esta investigación está dedicada a un sistema fundamental de ecuaciones en la teoría de la elasticidad lineal: el sistema de Lamé-Navier. El lenguaje de las álgebras de Clifford posibilita reescribir este sistema en términos del clásico operador de Dirac euclidiano, lo cual sugiere al mismo tiempo considerar una generalización natural a través de los llamados conjuntos estructurales. El objetivo principal de este trabajo es describir la estructura de las soluciones de estos sistemas. El alto grado de flexibilidad que supone la consideración de conjuntos estructurales arbitrarios, sugiere que dichos sistemas generalizados conducen a una amplia gama de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que podrían tener un interés no solo matemático sino también dentro de la física.

Palabras clave: sistema de Lamé-Navier, operador de Dirac, conjuntos estructurales.

Abstract

This research is devoted to a fundamental system of equations in Linear Elasticity Theory: The Lamé-Navier system. The Clifford algebras language allows us to rewrite this system in terms of the Euclidean Dirac operator, which at the same time suggests a very natural generalization involving the so-called structural sets. We are interested in finding some structures in the solutions of these generalized Lamé-Navier systems. The flexibility involved in the consideration of arbitrary structural sets suggests that this system leads to a wide range of systems of partial differential equations that could be of mathematical interest as well as in the context of Physics.

Key words: *Lamé-Navier system, Dirac operator, structural sets.*

Citación: Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R. ., & Árciga Alejandre, M. P. . (2023). Buscando estructuras en las soluciones de un sistema generalizado de lamé-navier. Publicaciones E Investigación, 17(1). https://doi.org/10.22490/25394088.5972

[1] https://orcid.org/0000-0003-0248-3942 / danielalfonso950105@gmail.com
[2] https://orcid.org/0000-0003-1453-7223 / rabreublaya@yahoo.es
[3] https://orcid.org/0000-0002-1637-8513 / mparciga@gmail.com

https://doi.org/10.22490/25394088.5972

1. Introducción

Un campo de desplazamiento tridimensional $\vec{u}$ en un material elástico lineal, isótropo y homogéneo, sin fuerzas de volumen, es descrito por el conocido sistema de Lamé-Navier (Barber, 2003; Fung, 1965; Malvern, 1969; Marsden & Hughes, 1983; Mushelishvili, 1953; Lamé, 1837; Sadd, 2005; Sokolnikoff, 1958):

$$\mathcal{L}_{\{\lambda,\mu\}}\,\vec{u} = \mu\Delta\vec{u} + (\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = 0, \qquad (1)$$

donde $\mu > 0$, $\lambda > -2\mu/3$ son los llamados coeficientes de Lamé y representan constantes elásticas que dependen del material. El sistema fue introducido por Gabriel Lamé en 1837 en el método de separación de variables para la solución de la ecuación de onda en coordenadas elípticas (Lamé, 1837). Las aplicaciones de este sistema cubren ramas tales como la electrostática lineal, los sistemas hamiltonianos caóticos y la teoría de los condensados de Bose-Einstein (Marsden & Hughes, 1983).

Investigaciones recientes lograron vislumbrar una estrecha relación de las soluciones de este sistema con las funciones inframonogénicas del análisis de Clifford. Moreno García *et al.* (2018) establecieron una reescritura del sistema de Lamé-Navier (2) en términos del clásico operador de Dirac utilizando el lenguaje de las álgebras de Clifford:

$$\mathcal{L}^*_{\{\lambda,\mu\}}\vec{u} = \left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right)\underline{\partial}_x\vec{u}\underline{\partial}_x + \left(\frac{3\mu+\lambda}{2}\right)\underline{\partial}_x\underline{\partial}_x\vec{u} = 0. \qquad (2)$$

Sea $\psi = \{\psi^1, \psi^2, \psi^3\} \subset \mathbb{R}^{(1)}_{0,3}$, una colección de vectores del álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,3}$. En la clase de funciones $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,3})$, donde Ω es un dominio de $\mathbb{R}^m$, se definen respectivamente los operadores de Dirac por la izquierda y por la de derecha a través de las expresiones:

$$\underline{\partial}^\psi[f] = \sum_{i=1}^{3}\psi^i\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad [f]\underline{\partial}^\psi = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}\psi^i. \qquad (3)$$

Si Δ denota al operador de Laplace tridimensional, es fácil probar que las igualdades

$$-\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi[f] = -[f]\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi = \Delta \qquad (4)$$

son ciertas si y solo si $\psi^i\psi^j + \psi^j\psi^i = -2\delta_{i,j}$, donde $\delta_{i,j}$ denota la delta de Kronecker. En otras palabras, la factorización en (4) tiene lugar si y solo si ψ representa una base ortonormal de $\mathbb{R}^{(1)}_{0,3}$. Un conjunto ψ con esta propiedad es llamado conjunto estructural. Nõno (1986) fue uno de los primeros que estudia estas generalizaciones. El término "conjunto estructural" se utiliza por vez primera relacionado al análisis cuaterniónico en los trabajos de Mitelman & Shapiro (1995) y Shapiro & Vasilevski (1998).

En la presente investigación se estudian generalizaciones naturales del sistema (2) considerando operadores de Dirac construidos con conjuntos estructurales. Se arriban a dos posibles generalizaciones en $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha\underline{\partial}^\psi[\vec{u}]\underline{\partial}^\psi + \beta\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi[\vec{u}] = 0 \qquad (5)$$

y

$$\alpha\underline{\partial}^\phi[\vec{u}]\underline{\partial}^\psi + \beta\underline{\partial}^\phi\underline{\partial}^\psi[\vec{u}] = 0, \qquad (6)$$

donde ϕ, ψ son dos conjuntos estructurales, y por brevedad se ha usado la notación $\alpha = (\mu+\lambda)/2$, $\beta = \frac{3\mu+\lambda}{2}$. Como consecuencia de las restricciones de Lamé se tendrá que

$$\beta > \alpha > \beta/7.$$

Las funciones dos veces continuamente diferenciables que anulan el operador $\underline{\partial}^\phi[\cdot]\underline{\partial}^\psi$ son llamadas funciones (ϕ,ψ)-inframonogénicas (Alfonso Santiesteban *et al.*, 2021) y son una extensión de las hoy conocidas funciones inframonogénicas. Estudios de las funciones inframonogénicas se pueden encontrar en Malonek *et al.* (2010), Malonek *et al.* (2011), Moreno García *et al.* (2017), Moreno García *et al.* (2018), y Moreno García *et al.* (2020).

Como se verá más adelante, determinadas soluciones del sistema clásico de Lamé-Navier en presencia de una fuerza de volumen, se pueden analizar como soluciones particulares de sistemas generalizados homogéneos de la forma (6). El sistema (5) coincide con (2) salvo una transformación ortogonal y por ende los campos de soluciones de ambos sistemas son isomorfos.

Esta ventaja no prevalece en el caso del sistema más exótico (, donde la unicidad de las soluciones del problema de Dirichlet asociado no se conserva, hecho este que significa una ruptura con el sistema clásico de Lamé donde la mencionada unicidad es un resultado conocido que se remonta a la obra de Kirchhoff (1897).

2. Nociones preliminares

Sea e_1, e_2, e_3 la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^3$, sujeta a las relaciones multiplicativas:

$$e_i^2 = -1, e_i e_j = -e_j e_i, i, j = 1,2, \dots, m, i < j.$$

El espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ queda sumergido en el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,3}$ generada por e_1, e_2, e_3 dentro del cuerpo de los números reales. Cualquier elemento $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito como $a = \sum_A a_A e_A$, donde a_A son constantes reales y A recorre todos los posibles conjuntos ordenados $A = \{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq i_m\}$ o $A = \emptyset$, y $e_A = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$. Note que entonces cualquier $a \in \mathbb{R}_{0,3}$ se puede escribir de forma única como $a = [a]_0 + [a]_1 + [a]_2 + [a]_3$, donde $[\cdot]_k$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{0,3}$en $\mathbb{R}_{0,3}^{(k)}$. Aquí $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ denota el subespacio de k-vectores definido por

$$\mathbb{R}_{0,3}^{(k)} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(e_A : |A| = k). \tag{7}$$

Es costumbre identificar a $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}_{0,3}^{(0)}$, los conocidos escalares en $\mathbb{R}_{0,3}$ y $\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}_{0,3}^{(1)} \cong \mathbb{R}^3$, el conjunto de vectores. Los elementos en $\mathbb{R}_{0,3}^{(2)}$ son llamados bivectores, mientras que los elementos en $\mathbb{R}_{0,3}^{(3)}$ son nombrados pseudoescalares. La conjugación en $\mathbb{R}_{0,3}$ es definida como la involución $a \to \overline{a}$ para la cual $\overline{e_i} = -e_i$. Una norma $||.||$ sobre $\mathbb{R}_{0,3}$ es definida por la expresión $||a||^2 = Sc[a\overline{a}]$. Observemos que para $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ se tiene $||\underline{x}|| = |\underline{x}|$, coincidiendo con la usual norma Euclidiana en $\mathbb{R}^3$.

Consideraremos funciones definidas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ y que toman valores en $\mathbb{R}_{0,3}$. Estas funciones pueden ser escritas como $f = \sum_A f_A e_A$, donde f_A son funciones que toman valores reales. Las nociones de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad de una función con valores en $\mathbb{R}_{0,3}$ se introducen usualmente por componentes.

El clásico operador de Dirac se define como

$$\underline{\partial} := e_1 \partial_{x_1} + e_2 \partial_{x_2} + e_3 \partial_{x_3},$$

y es el principal operador diferencial en el análisis de Clifford (Gürlebeck & Sproessig, 1990).

Una función que toma valores en $\mathbb{R}_{0,3}$, definida y diferenciable en un abierto Ω de $\mathbb{R}^3$, es llamada monogénica por la derecha (monogénica por la izquierda) si $\underline{\partial} f = 0$ $(f\underline{\partial} = 0)$ en Ω (Brackx *et al.*, 1982; Delanghe *et al.*, 2001; Gürlebeck, 1998; Gürlebeck *et al.,* 1999; Kraussha r *et al.,* 2001; Liu & Hong, 2018). Acorde a los operadores de Dirac generalizados definidos en (3), se introducen las funciones ψ-hiperholomorfas (por la izquierda o derecha respectivamente) como aquellas funciones que pertenecen a $Ker\left[\underline{\partial}^{\psi}(.)\right]$ o $Ker\left[(.)\underline{\partial}^{\psi}\right]$ (Abreu *et al.,* 2016, 2017; Gürlebeck & Nguyen, 2014, 2015; Nguyen, 2015).

En el trabajo se introducen las siguientes subclases de funciones:

$$\mathfrak{I}_{\phi,\psi}(\Omega) = \{\mathrm{u} \in \mathrm{C}^2(\Omega) : \underline{\partial}^{\phi}[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi} = 0\}, \tag{8}$$

$$\mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega) = \{\mathrm{u} \in \mathrm{C}^2(\Omega) : \underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}] = 0\}. \tag{9}$$

Siguiendo la terminología introducida en Alfonso Santiesteban *et al.* (2021), las funciones que pertenecen a $\mathfrak{I}_{\phi,\psi}(\Omega)$ son llamadas (ϕ, ψ)-inframonogénicas. En caso de que $\phi = \psi = \{e_1, e_2, e_3\}$, la clase $\mathfrak{I}_{\phi,\psi}(\Omega)$ se reduce al espacio $\mathfrak{I}(\Omega)$ de funciones inframonogénicas. También es de mencionar que cuando $\phi = \psi$ la clase $\mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ compuesta por las funciones (ϕ, ψ)-armónicas en la terminología de Serrano Ricardo *et al.* (2021), coincide con el espacio $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones armónicas en Ω. Para campos vectoriales utilizaremos la notación alternativa $\underline{\mathfrak{I}}_{\phi,\psi}(\Omega)$, $\underline{\mathcal{H}}_{\phi,\psi}(\Omega)$ y $\underline{\mathcal{H}}(\Omega)$.

3. Resultados auxiliares

Con el objetivo de probar los resultados principales de la investigación, estableceremos en esta sección algunos resultados auxiliares, así como sus demostraciones. Primeramente, exponemos la siguiente proposición que generaliza una propiedad interesante que cumplen las funciones inframonogénicas:

Proposición 1. Una función f es (ψ,ψ)-inframonogénica en Ω si y solo si cada componente k-vectorial $[f]_k$, $0 \leq k \leq 3$, es (ψ,ψ)-inframonogénica en Ω.

Demostración. La demostración se basa en el hecho de que la función

$$\begin{aligned} f = f_0 + f_1\psi_1 + f_2\psi_2 + f_3\psi_3 + f_{12}\psi_1\psi_2 \\ + f_{13}\psi_1\psi_3 + f_{23}\psi_2\psi_3 \\ + f_{123}\psi_1\psi_2\psi_3 \end{aligned}$$

es (ψ,ψ)-inframonogénica en Ω si y solo si la función

$$\begin{aligned} \tilde{f} = f_0 + f_1e_1 + f_2e_2 + f_3e_3 + f_{12}e_1e_2 + f_{13}e_1e_3 \\ + f_{23}e_2e_3 + f_{123}e_1e_2e_3 \end{aligned}$$

es inframonogénica en Ω.

Esta propiedad no es generalmente válida para conjuntos estructurales distintos. Efectivamente, como un simple contraejemplo tomemos a la función:

$$\begin{aligned} h(\underline{x}) = \left(-\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \sqrt{2}x_1x_2 + x_3^2\right)e_1e_2e_3 \\ + x_3^2e_2 \end{aligned}$$

Haciendo $\phi = \{e_1, e_3, e_2\}$ y $\psi = \{\frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_3), \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_3), e_2\}$, un cálculo directo demuestra que $\underline{\partial}^\phi[g]\underline{\partial}^\psi = 0$, mientras que $\underline{\partial}^\phi[g]_1\underline{\partial}^\psi = -2e_2 \neq 0$ y $\underline{\partial}^\phi[g]_3\underline{\partial}^\psi = 2e_2 \neq 0$.

Sean ahora $\psi = \{\psi^1, \psi^2, \psi^3\}$ y $\phi = \{\phi^1, \phi^2, \phi^3\}$ dos conjuntos estructurales arbitrarios de $\mathbb{R}^3$. Definimos los siguientes operadores:

$$\nu(f) = \sum_{i=1}^{3} \psi^i f \psi^i, \quad \omega(f) = \sum_{i=1}^{3} \phi^i f \psi^i, \quad \widetilde{\omega}(f) = \sum_{i=1}^{3} \psi^i f \phi^i,$$

donde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{0,3}$.

En el siguiente lema, asumimos tácitamente la diferenciabilidad de las funciones involucradas. La prueba del mismo se obtiene a partir de una verificación directa.

Lema 1. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{0,3}$ y $\underline{x}_\psi = \sum_{i=1}^{3} \psi^i x_i$. Entonces,

1. $\underline{\partial}^\psi[f\underline{x}_\psi] = (\underline{\partial}^\psi[f])\underline{x}_\psi + \nu(f)$, $\quad [\underline{x}_\psi f]\underline{\partial}^\psi = \underline{x}_\psi([f]\underline{x}_\psi\underline{\partial}^\phi) + \nu(f)$
2. $\underline{\partial}^\psi[\nu(f)] = -2[f]\underline{\partial}^\psi - \nu(\underline{\partial}^\psi[f])$, $\quad [\nu(f)]\underline{\partial}^\psi = -2\underline{\partial}^\psi[f] - \nu([f]\underline{\partial}^\psi)$
3. $\underline{\partial}^\psi[\nu(f)]\underline{\partial}^\psi = \nu(\underline{\partial}^\psi[f]\underline{\partial}^\psi)$, $\quad [\nu(f)]\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi = -\Delta\nu(f) = \nu(\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi[f]) = -\nu(\Delta f)$
4. $\underline{\partial}^\phi[\omega(f)]\underline{\partial}^\psi = \omega(\underline{\partial}^\phi[f]\underline{\partial}^\psi)$, $\quad [\omega(f)]\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi = -\Delta\omega(f) = -\omega(\Delta f)$
5. $\nu(\vec{u}) = \vec{u}$
6. $\underline{\partial}^\phi[\omega(f)] = -2[f]\underline{\partial}^\psi - \omega(\underline{\partial}^\phi[f])$, $\quad [\omega(f)]\underline{\partial}^\psi = -2\underline{\partial}^\phi[f] - \omega([f]\underline{\partial}^\psi)$
7. $\underline{\partial}^\phi[f\underline{x}_\psi] = (\underline{\partial}^\phi[f])\underline{x}_\psi + \omega(f)$, $\quad [\underline{x}_\psi f]\underline{\partial}^\phi = \underline{x}_\psi([f]\underline{\partial}^\phi) + \widetilde{\omega}(f)$
8. $\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\phi[\omega(f)] - \omega(\underline{\partial}^\phi\underline{\partial}^\psi[f]) = \underline{\partial}^\phi[\omega(\underline{\partial}^\psi[f])] - \underline{\partial}^\psi[\omega(\underline{\partial}^\phi[f])]$

A continuación, observaremos que las soluciones de los sistemas generalizados (6), y por tanto (5), son funciones biarmónicas. En realidad, se demuestra un resultado más fuerte:

Proposición 2. Si $\vec{u} \in C^3(\Omega)$ satisface en Ω el sistema generalizado de Lamé-Navier (6), entonces $\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi[\vec{u}] = 0$ en Ω.

Demostración. Si aplicamos $\underline{\partial}^\phi$ por la izquierda de (6) obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha\underline{\partial}^\phi\underline{\partial}^\phi[\vec{u}]\underline{\partial}^\psi + \beta\underline{\partial}^\phi\underline{\partial}^\phi\underline{\partial}^\psi[\vec{u}] \\ = \alpha[\vec{u}]\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\phi\underline{\partial}^\phi + \beta\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi[\vec{u}] \\ = 0. \end{aligned}$$

Como $[\vec{u}]\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\phi = -\frac{\alpha}{\beta}\underline{\partial}^\psi[\vec{u}]\underline{\partial}^\phi$, se sigue que

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha^2}{\beta}\underline{\partial}^\psi[\vec{u}]\underline{\partial}^\phi\underline{\partial}^\phi + \beta\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi[\vec{u}] \\ = \left(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi[\vec{u}] = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que $\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}^\psi[\vec{u}] = 0$, porque $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \neq -\beta$ debido a las restricciones de Lamé.

4. Representación aditiva de las soluciones de sistemas generalizados

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 3.1 aparecido en Moreno García *et al.* (2018).

Teorema 1. Si un campo vectorial $\vec{u}$ satisface en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el sistema generalizado de Lamé-Navier (5), entonces este admite en Ω la descomposición

$$\vec{u} = \vec{h} + \vec{\imath}, \tag{1}$$

donde $\vec{h} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega)$ e $\vec{\imath} \in \underline{\mathfrak{I}}_{\psi,\psi}(\Omega)$. Además, esta representación es única salvo un campo vectorial en $\underline{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \underline{\mathfrak{I}}_{\psi,\psi}(\Omega)$.

Demostración. Tomemos una solución $\vec{u}$ de (5) en Ω, la función $g = \alpha[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]$ es ψ-hiperholomorfa por la izquierda en Ω. Si se usa el Lema 1 (1)-(5) se obtiene que

$$\begin{aligned}\underline{\partial}^{\psi}[g\underline{x}_{\psi}]\underline{\partial}^{\psi} &= -\nu([g]\underline{\partial}^{\psi}) = -[g]\underline{\partial}^{\psi}\\ &= \left(-\beta + \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi}\end{aligned}$$

y

$$\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}^{\psi}[g\underline{x}_{\psi}] = -2[g]\underline{\partial}^{\psi} = 2\left(-\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}].$$

Por tanto

$$I \coloneqq g\underline{x}_{\psi} + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\vec{u} \in \mathfrak{I}_{\psi,\psi}(\Omega)$$

$$H \coloneqq g\underline{x}_{\psi} + \left(2\alpha - \frac{2\beta^2}{\alpha}\right)\vec{u} \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Luego a partir de la Proposición 1 podemos tomar la parte vectorial de I y H obteniendo lo buscado:

$$\vec{u} = \left(2\alpha - \beta + \frac{\alpha^2}{\beta} - \beta\right)^{-1}([H]_1 - [I]_1).$$

Sea $\vec{u} = \overrightarrow{h_1} + \overrightarrow{\imath_1}$ otra representación de la solución $\vec{u}$ de este sistema, entonces

$$\overrightarrow{h_1} + \overrightarrow{\imath_1} - \vec{h} - \vec{\imath} = 0,$$

por tanto, $\overrightarrow{h_1} - \vec{h} = \vec{\imath} - \overrightarrow{\imath_1}$, luego como $\overrightarrow{h_1} - \vec{h} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega)$ e $\vec{\imath} - \overrightarrow{\imath_1} \in \underline{\mathfrak{I}}_{\psi,\psi}(\Omega)$, si se escoge $\vec{s} = \overrightarrow{h_1} - \vec{h} = \vec{\imath} - \overrightarrow{\imath_1}$, claramente $\vec{s} \in \underline{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \underline{\mathfrak{I}}_{\psi,\psi}(\Omega)$, concluyendo así la prueba.

Observación: Si tomamos el campo vectorial armónico

$$\vec{u} = x_1x_2e_1 + x_1x_3e_2 + x_2x_3e_3$$

y los conjuntos estructurales siguientes

$$\phi = \{e_1, e_2, e_3\},$$
$$\psi = \{e_3, e_2, e_1\},$$

entonces se obtiene

$$\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}] = 0 \Rightarrow \underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi} = 0$$
$$\underline{\partial}[\vec{u}]\underline{\partial} = -4e_2 \neq 0.$$

Esto significa que el campo $\vec{u}$ es un desplazamiento universal para el sistema generalizado (5) y sin embargo no lo es para el sistema clásico de Lamé-Navier.

Para la prueba de los resultados posteriores, es necesario utilizar el siguiente lema cuya demostración se basa en cálculos directos mediante las relaciones establecidas en el Lema 1.

Lema 2. Sea $\vec{u}$ que satisface (6) en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y tomemos $g = \alpha[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]$. Entonces

$$\begin{aligned}\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[g\underline{x}_{\psi}] &= (\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[g])\underline{x}_{\psi}\\ &\quad - \frac{\alpha}{\beta}\underline{\partial}^{\phi}[g\underline{x}_{\psi}]\underline{\partial}^{\psi}\\ &\quad + \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta\right)\omega(\Delta\vec{u})\\ &\quad + 2\left(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha\right)\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}],\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}\Big[g\underline{x}_{\psi} - \frac{\alpha}{\beta}\overline{g}\underline{x}_{\psi} &- \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta + \frac{2\beta^2}{\alpha} - 2\alpha\right)\vec{u}\Big]\\ &= (\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}g)\underline{x}_{\psi}\\ &\quad + \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta\right)\omega(\Delta\vec{u}).\end{aligned} \tag{13}$$

Teorema 2. Sea $\vec{u}$ que satisface (6) en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si $\vec{u}$ es armónico y (ψ, ψ)-inframonogénico en Ω, entonces este admite la representación

$$\vec{u} = h + i, \tag{14}$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $i \in \underline{\mathfrak{I}}_{\phi,\psi}(\Omega)$. Además, esta representación es única salvo un campo vectorial en $\mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega) \cap \underline{\mathfrak{I}}_{\phi,\psi}(\Omega)$.

Demostración. Sea $g = \alpha[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]$. Es claro que como $\vec{u}$ es un campo vectorial armónico y (ψ,ψ)-inframonogénico tendremos que

$$\underline{\partial}^{\phi} g = \underline{\partial}^{\psi} g = g\underline{\partial}^{\psi} = 0.$$

Por las relaciones 6 y 7 del Lema 1 obtenemos

$$\begin{aligned}\underline{\partial}^{\phi}[g\underline{x}_{\psi}]\underline{\partial}^{\psi} &= [\omega(g)]\underline{\partial}^{\psi} \\ &= -2\underline{\partial}^{\phi}[g] - \omega([g]\underline{\partial}^{\psi}) = 0.\end{aligned}$$

A continuación, por la relación (12) del Lema 2:

$$\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}\left[g\underline{x}_{\psi} - 2\left(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha\right)\vec{u}\right] = 0.$$

Como $\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} \neq 0$, la prueba es completada tomando

$$\begin{aligned}h &:= 2\left(-\frac{\beta^2}{\alpha} + \alpha\right)^{-1}\left[g\underline{x}_{\psi} - 2\left(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha\right)\vec{u}\right], i \\ &:= -2\left(-\frac{\beta^2}{\alpha} + \alpha\right)^{-1} g\underline{x}_{\psi}.\end{aligned}$$

Por último, la unicidad de la representación se prueba siguiendo la misma idea empleada en el Teorema 1.

Hacemos notar que en el teorema anterior la representación que se obtiene está dada por funciones más generales que toman valores en $\mathbb{R}_{0,3}$ y no necesariamente tienen que ser campos vectoriales como en el Teorema 1. Este hecho también se conserva en los siguientes resultados, en los que la unicidad de la representación es demostrada como en el Teorema 1 por lo que esta parte de la prueba será omitida.

Teorema 3. Sea $\vec{u}$ que satisface (6) en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si $\vec{u}$ es (ψ,ψ)-inframonogénico en Ω, entonces este admite la representación

$$\vec{u} = h + \check{\imath}, \tag{15}$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $\check{\imath} \in \underline{\mathfrak{I}}_{\psi,\phi}(\Omega)$. Además, esta representación es única salvo un campo vectorial en $\mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega) \cap \underline{\mathfrak{I}}_{\psi,\phi}(\Omega)$.

Demostración. Tomemos $g = \alpha[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]$. Como $\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi} = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[g] = \underline{\partial}^{\phi}[\bar{g}]\underline{\partial}^{\psi} &= \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Utilizando las relaciones del Lema 2 se obtienen las fórmulas:

$$\underline{\partial}^{\phi}[g\underline{x}_{\psi}]\underline{\partial}^{\psi} = -\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}\left[\bar{g}\underline{x}_{\psi} - \left(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha\right)\vec{u}\right],$$

$$\begin{aligned}\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}&\left[\left(g - \frac{\beta}{\alpha}\bar{g}\right)\underline{x}_{\psi} - \left(\frac{2\beta^2}{\alpha} + \beta - 2\alpha - \frac{\beta^3}{\alpha^2}\right)\vec{u}\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como $g - \frac{\beta}{\alpha}\bar{g} = (\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha})[\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi}$ entonces

$$\underline{\partial}^{\psi}[([\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi})\underline{x}_{\psi}] = \nu([\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi}) = -2\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}] - [\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi}.$$

Por ende, $\underline{\partial}^{\psi}[([\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi})\underline{x}_{\psi}]\underline{\partial}^{\phi} = \left(\frac{\alpha}{\beta} - 2\right)\underline{\partial}^{\psi}[\vec{u}]\underline{\partial}^{\phi}$, o equivalentemente

$$\underline{\partial}^{\psi}\left[([\vec{u}]\underline{\partial}^{\psi})\underline{x}_{\psi} - \left(\frac{\alpha}{\beta} - 2\right)\vec{u}\right]\underline{\partial}^{\phi} = 0.$$

Sean ahora

$$\begin{aligned}\check{I} := \left(g - \frac{\beta}{\alpha}\bar{g}\right)\underline{x}_{\psi} - \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta} - 2\right)\vec{u} \\ \in \underline{\mathfrak{I}}_{\psi,\phi}(\Omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H := \left(g - \frac{\beta}{\alpha}\bar{g}\right)\underline{x}_{\psi} - \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta} - 2\right)\vec{u} \\ + \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - 2\beta + \frac{\beta^3}{\alpha^2}\right)\vec{u} \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega).\end{aligned}$$

Entonces $\vec{u}$ admite la descomposición

$$\vec{u} = h + \check{\imath},$$

donde

$$\begin{aligned}h &= \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - 2\beta + \frac{\beta^3}{\alpha^2}\right)^{-1} H, \check{\imath} \\ &= -\left(\frac{\alpha^2}{\beta} - 2\beta + \frac{\beta^3}{\alpha^2}\right)^{-1}\check{I},\end{aligned}$$

y $\frac{\alpha^2}{\beta} - 2\beta + \frac{\beta^3}{\alpha^2} \neq 0$ de acuerdo a las restricciones de Lamé-Navier. □

También podemos obtener la misma representación si se exige la armonicidad del campo solución:

Teorema 4. Sea $\vec{u}$ que satisface (6) en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si $\vec{u}$ es armónico en Ω, entonces este admite la representación

$$\vec{u} = h + \check{\imath},$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $\check{\imath} \in \underline{\mathfrak{I}}_{\psi,\phi}(\Omega)$. Además, esta representación es única salvo un campo vectorial en $\mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega) \cap \underline{\mathfrak{I}}_{\psi,\phi}(\Omega)$.

Demostración. La prueba se basa en un procedimiento análogo al realizado en el teorema anterior.

De la misma manera, podemos también obtener el siguiente resultado para campos vectoriales que son simultáneamente soluciones de ambos sistemas generalizados:

Teorema 5. Si $\vec{u}$ satisface los sistemas generalizados (5) y (6) en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, entonces este admite la representación

$$\vec{u} = h + \check{\imath},$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega)$ e $\check{\imath} \in \underline{\mathfrak{I}}_{\psi,\phi}(\Omega)$. Además, esta representación es única salvo un campo vectorial en $\mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega) \cap \underline{\mathfrak{I}}_{\psi,\phi}(\Omega)$.

5. Construcción de soluciones a sistemas generalizados

En esta sección enunciaremos algunos resultados relacionados con la construcción de soluciones de sistemas generalizados de Lamé-Navier. El primero de estos, muestra cómo a partir de una función (ϕ,ψ)-armónica por la izquierda o (ψ,ψ)-inframonogénica en Ω se puede construir una solución al sistema (6).

Teorema 6. Si u es (ϕ,ψ)-armónica por la izquierda o (ψ,ψ)-inframonogénica en Ω, entonces $w = [u]\underline{\partial}^{\psi} - \frac{\alpha}{\beta}\underline{\partial}^{\psi}[u]$ satisface (6).

Demostración. Si se sustituye $w = [u]\underline{\partial}^{\psi} - \frac{\alpha}{\beta}\underline{\partial}^{\psi}[u]$ en (6) obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha\underline{\partial}^{\phi}[u]\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[u]\underline{\partial}^{\psi} - \alpha\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}^{\psi}[u] \\ - \frac{\alpha^2}{\beta}\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[u]\underline{\partial}^{\psi} \\ = \left(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[u]\underline{\partial}^{\psi},\end{aligned}$$

Pero como u es (ϕ,ψ)-armónica por la izquierda o (ψ,ψ)-inframonogénica en Ω entonces el resultado es inmediato.

A través de un método similar arribamos al siguiente teorema:

Teorema 7. Si u es armónica o (ϕ,ψ)-inframonogénica en Ω, entonces $\widetilde{w} = [u]\underline{\partial}^{\psi} - \frac{\beta}{\alpha}\underline{\partial}^{\psi}[u]$ satisface (6).

Se hace notar que los Teoremas 6 y 7 se enunciaron para el caso general en que u sea una función que tome valores en el álgebra de Clifford, pero es obvio que si se restringe u a campos escalares entonces w y $\widetilde{w}$, obtenidas explícitamente en estos teoremas, serán campos vectoriales.

Los siguientes resultados posibilitan también la construcción de soluciones del sistema de Lamé-Navier generalizado a partir de determinadas funciones componentes.

Teorema 8. Sea $\vec{\imath} \in \mathfrak{I}_{\phi,\psi}(\Omega) \cap \mathfrak{I}_{\psi,\psi}(\Omega)$ y suponga que $\underline{\partial}^{\phi}[\omega(\vec{\imath})] = \underline{\partial}^{\psi}[\vec{\imath}]$. Entonces existe una función $h \in \underline{\mathcal{H}}_{\phi,\psi}(\Omega)$ tal que $\vec{\imath} + h$ resuelve (6). Además, h puede ser representada como $h = \frac{\beta}{\alpha}(2\vec{\imath} + ([\vec{\imath}]\underline{\partial}^{\psi})\, \underline{x}_{\psi})$.

Demostración. Calculando directamente se obtiene

$$\begin{aligned}&\alpha\underline{\partial}^{\phi}[h]\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{\imath}] \\ &\quad = \beta\left[2\underline{\partial}^{\phi}[\vec{\imath}] + \left(\underline{\partial}^{\phi}[\vec{\imath}]\underline{\partial}^{\psi}\right)\underline{x}_{\psi} \right. \\ &\quad \left. + \omega\left([\vec{\imath}]\underline{\partial}^{\psi}\right)\right]\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{\imath}] \\ &\quad = \beta\omega\left([\vec{\imath}]\underline{\partial}^{\psi}\right)\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{\imath}] \\ &\quad = \beta\left(-2\underline{\partial}^{\phi}[\vec{\imath}]\underline{\partial}^{\psi} - [\omega(\vec{\imath})]\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}^{\psi}\right) \\ &\quad + \beta\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{\imath}] \\ &\quad = -\beta\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\phi}[\omega(\vec{\imath})] + \beta\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{\imath}] \\ &\quad = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado, también se tiene

$$\begin{aligned}\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[h] &= \frac{\beta}{\alpha}\{2\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{\imath}] \\ &\quad + \underline{\partial}^{\phi}\left[\left(\underline{\partial}^{\psi}[\vec{\imath}]\underline{\partial}^{\psi}\right)\underline{x}_{\psi} + \nu\left([\vec{\imath}]\underline{\partial}^{\psi}\right)\right]\} \\ &= \frac{\beta}{\alpha}\left(2\underline{\partial}^{\phi}\underline{\partial}^{\psi}[\vec{\imath}] \right. \\ &\quad \left. + \underline{\partial}^{\phi}\left[-2\underline{\partial}^{\psi}[\vec{\imath}] - [\nu(\vec{\imath})]\underline{\partial}^{\psi}\right]\right) = 0,\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Similarmente podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 9. Sea $\vec{h} \in \mathcal{H}_{\phi,\psi}(\Omega) \cap \underline{\mathcal{H}}(\Omega)$ y suponga que $\omega\left(\underline{\partial}^{\psi}[\vec{h}]\right) = -\underline{\partial}^{\phi}[\vec{h}]$. Entonces existe una función $i \in \mathfrak{J}_{\phi,\psi}(\Omega)$ tal que $\vec{h} + i$ resuelve (6). Además, i puede ser representada como $i = \frac{\alpha}{2\beta}(\vec{h} + (\underline{\partial}^{\psi}[\vec{h}])\, \underline{x}_{\psi})$.

Si escogemos los conjuntos estructurales siguientes:

$$\phi = \{e_3, -e_1, e_2\},$$
$$\psi = \{e_3, e_1, e_2\}.$$

Mediante un cálculo laborioso podemos apreciar que el campo vectorial armónico

$$\vec{u} = 3x_2x_3e_1 + (2x_2^2 - x_1^2 - x_3^2)e_2 + x_1e_3$$

es solución al sistema generalizado (6) con $\alpha = 0.1$ y $\beta = 0.2$. Por otro lado se verifica la identidad

$$\alpha\underline{\partial}[\vec{u}]\underline{\partial} + \beta\underline{\partial}\,\underline{\partial}[\vec{u}] = -\frac{4}{5}e_2.$$

Este hecho significa que el campo armónico $\vec{u}$ es también solución a un sistema clásico de Lamé-Navier en presencia de una fuerza de volumen constante. Esto sugiere que soluciones particulares de sistemas de Lamé-Navier no homogéneos puedan estudiarse como soluciones a sistemas generalizados de Lamé-Navier homogéneos.

6. Conclusiones

En esta investigación se compararon las diferentes generalizaciones estudiadas con el sistema clásico de Lamé-Navier y se llegaron a diferentes pautas acerca de la descomposición aditiva de sus soluciones. Asimismo, se obtuvieron resultados auxiliares que posibilitaron la construcción de soluciones, así como indagar en la naturaleza de las diferentes generalizaciones. Se pudo apreciar como soluciones particulares del sistema más general son también soluciones de sistemas de Lamé-Navier en presencia de una fuerza de volumen. La importancia de considerar conjuntos estructurales arbitrarios en la ecuación de Lamé-Navier generalizada se plasma en el estudio de estos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales como una alternativa eficaz para indagar en disímiles aspectos como: problemas de frontera asociados a sistemas elásticos, representaciones de funciones armónicas, mapeos conformes, problemas variacionales, perturbaciones e incluso tópicos de mécanica cuántica.

Referencias

Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J, Guzmán, A. & Kähler, U. (2016). On the -operator in Clifford Analysis. *Journal of Mathematical Analysisand Applications, 434*, (2), 1138-1159.

Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J., Guzmán, A. & Kähler, U. (2017). On the ϕ-Hiperderivative of the ψ-Cauchy-Type Integral in Clifford Analysis. *Computational Methods and Function Theory, 17*, 101-119.

Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R. & Árciga Alejandre, M. P. (2021). On ()-Inframonogenic Function in Clifford Analysis. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 53*, (2). 605-621. https://doi.org/10.1007/s00574-021-00273-6

Barber, J. R. (2003). *Solid mechanics and its applications*. Berlin: Springer.

Brackx, F., Delanghe, R. & Sommen, F. (1982). Clifford analysis. *Research Notes in Mathematics.* 76, Boston: Pitman (Advanced Publishing Program).

Delanghe, R., Krausshar, R.S. & Malonek, H.R. (2001). Differentiability of functions with values in some real associative algebras: approaches to an old problem. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liége, 70*, (4-6), 231-249.

Fung, Y. C. (1965). *Foundations of Solid Mechanics*. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall.

Gürlebeck, K. (1998). On some classes of Pi-operators, in Dirac operators in analysis. (eds. J. Ryan & D. Struppa), *Pitman Research Notes in Mathematics, 394*.

Gürlebeck, K., Kähler, U. & Shapiro, M. (1999). On the Π-operator in hyperholomorphic function theory. *Advances in Applied Clifford Algebras, 9*(1), 23-40.

Gürlebeck, K. & Sproessig, W. (1990). *Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Vaule Problems*. Basel: Birkhuser AG.

Gürlebeck, K. & Nguyen, H. M. (2015). ψ-hyperholomorphic functions and an application to elasticity problems. *AIP Conference Proceedings,1648*(1), 440005.

Gürlebeck, K. & Nguyen, H. M. (2014). On ψ-Hyperholomorphic Functions and a Decomposition of Harmonics. Hyper complex Analysis: New Perspectives and Applications. *Trends in Mathematics* (pp.181-189). Birkhäuser, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08771-9_12

Kirchhoff, G. (1897 [1876]). *Vorlesungen über mathematische Physik, 1, Mechanik,* 4th. ed. Leipzig: Teuner.

Kraussher, R.S. & Malonek, H.R. (2001). A characterization of conformal mappings in by a formal differentiability condition. *Bulletin de la Societe Royale des Sciences de Lieg 70*(1), 35-49.

Lamé, G. (1837). Sur les surfaces isothermes dans les corps homogènes en équilibre de temprature. *Journal de mathématiques pures et appliquées. 2,* 147–188.

Liu, L.W. & Hong, H. K. (2018). Clifford algebra valued boundary integral equations for three-dimensional elasticity. *Applied Mathematical Modelling, 54*, 246-267.

Malonek, H., Peña Peña, D. & Sommen, F. (2011). A Cauchy-Kowalevski Theorem for Inframonogenic Functions. *Mathematical Journal Of Okayama University, 53*, 167–172.

Malonek, H., Peña Peña, D. & Sommen, F. (2010). Fischer decomposition by inframonogenic functions. *CUBO A Mathematical Journal, 12*(02), 189–197.

Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.* Upper Saddle River, NJ.: Prentice-Hall.

Marsden, J. E. & Hughes, T. (1983). *Mathematical foundations of elasticity*. New York: Dover Publications.

Mitelman, I. M. & Shapiro, M. V. (1995). Differentiation of the Martinelli-Bochner Integrals and Notion of Hyperderivability. *Mathematische Nachrichten, 172*(1), 211–238.

Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R. & Bory Reyes, J. (2017). A Cauchy integral formula for inframonogenic functions in Clifford analysis. *Advances in Applied Clifford Algebras 27*(2), 1147-1159.

Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R. & Bory Reyes, J. (2020). Decomposition of inframonogenic functions with applications in elasticity theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 43*(4), 1915-1924.

Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R. & Bory Reyes, J. (2018). Inframonogenic functions and their applications in three dimensional elasticity theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41*(10), 3622-3631.

Mushelishvili, N.I. (1953). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* Groningen: Noordhoff.

Nguyen, H. M. (2015). *ψ-Hyperholomorphic Function Theory in R 3: Geometric Mapping Properties and Applications.* (Habilitation Thesis). Fakultat Bauingenieurwesen der Bauhaus-Universitat. Weimar. e-pub.uni-weimar.de.

Nno, K. (1986). On the quaternion linearization of Laplacian Δ. *Bulletin Fukuoka University*. Ed. III 35, 510.

Sadd, M. H. (2005). *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*. Oxford: Elsevier.

Serrano Ricardo, J.L., Bory Reyes, J. & Abreu Blaya, R. (2021). Singular integral operators and a ∂-problem for (ϕ,ψ)-harmonic functions. *Analysis and Mathematical Physics, 11,* 155. https://doi.org/10.1007/s13324-021-00590-5

Shapiro, M. V. & Vasilevski, N. L. (1998). Quaternionic ψ-hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. I. ψ-hyperholomorphic function theory. *Complex Variables, 27,* 17-46.

Sokolnikoff, I. S. (1958). Mathematical Theory of Elasticity. New York: MacGraw-Hill,.