

**APLICACIÓN DE LA LEY DE FICK Y EL MODELO DE PELEG
PARA ESTUDIAR LA ABSORCIÓN DE AGUA EN EL FRIJOL
CARGAMANTO OMBLIGO AMARILLO (*PHASEOLUS
VULGARIS L.*) Y LA ARVEJA SECA (*PISAN SATIVA*)
DURANTE LA REHIDRATACION**

**LAW ENFORCEMENT FICK AND PELEG MODEL FOR STUDY
OF WATER UPTAKE IN NAVEL CARGAMANTO YELLOW
(*PHASEOLUS VULGARIS L.*) AND PEAS SECA
(*PISAN SATIVA*) DURING REHYDRATION**

John Fernando Agudelo Ospina,¹ Ricardo Arturo Franco Castro²

RESUMEN

Se evaluó la aplicabilidad de la ley de Fick y el modelo matemático empírico de Peleg, en el proceso de rehidratación de frijol cargamanto ombligo amarillo (*Phaseolus Vulgaris L.*) y la arveja seca (*Pisum sativum*), utilizando cinco temperaturas de rehidratación 25, 35, 40, 47 y 55 °C. El frijol sigue el modelo matemático de Peleg y se le determinó la ecuación de rehidratación. La arveja tuvo un comportamiento diferente. Los coeficientes de difusión calculados estuvieron alrededor de 9.54×10^{-10} m²/s para el frijol cargamento y 1.76×10^{-10} para la arveja seca. Las energías de activación fueron de 41.46 KJ/mol y 56.256 KJ/mol para el frijol y la arveja, respectivamente.

Palabras clave: frijol, arveja seca, rehidratación, modelos de absorción de agua, ley de Fick, difusión, modelo de Peleg.

ABSTRACT

*This research validated Fick's Law and Peleg's model applicability for modeling water sorption of yellow navel cargamanto bean (*Phaseolus Vulgaris L.*) and dry pea (*Pisum sativum*), using five different water temperatures 25, 35, 40, 47 y 55 °C, to soak the analyzed materials; for bean an optimal mathematical expression was obtained to make estimations, opposite case was the observed thing for pea; the diffusion coefficient calculated were all of the order of 1.91×10^{-9} m²/s for bean and 3.51×10^{-10} for dry pea; the activation energies were 41.464 KJ/mol for bean and 56.246 KJ/mol for dry pea.*

1 Especialista en Ingeniería de Procesos en Alimentos y Biomateriales, UNAD. Gerente de TechniFood Ingeniería & Consultoría E.U. E-mail: jfagudelo@une.net.co, technifoodingenieria@yahoo.com.

2 Ricardo Franco: Especialista en Ingeniería de Procesos en Alimentos y Biomateriales, UNAD. Gerente de Producción e Innovación INCOLFEC S.A., Manizales. E-mail: ricardofranco@hotmail.com.

Key words: *bean, Dry pea, Rehydration, water absorption model, Fick's Law, diffusion, Peleg's Model.*

Recibido: mayo 4 de 2009

Aprobado: mayo 26 de 2009

INTRODUCTION

En la industria de enlatado de alimentos es de suma importancia el control del proceso de hidratación de los materiales, debido a que este gobierna las subsecuentes operaciones y la calidad del producto final; además, influye de manera sustancial en los tiempos de operación y en los costos productivos derivados del rendimiento de las materias primas y la eficiencia en los fenómenos de transferencia de calor, implícitos en el esquema productivo.

Por lo tanto, es imperiosa la necesidad de construir modelos, que a un buen nivel de aproximación, expliquen los fenómenos de transferencia de masa mediante ecuaciones matemáticas de fácil y alta aplicabilidad en el control de los procesos productivos.

La ley de Fick es una ley cuantitativa en forma de ecuación diferencial que describe diversos casos de difusión de materia en un medio en el que inicialmente no existe equilibrio químico o térmico [5].

Este flujo irá en el sentido opuesto del gradiente y si éste es débil, podrá aproximarse por el primer término de la serie de Taylor, resultando la ley de Fick [5]:

Siendo D el coeficiente de difusión de la especie de concentración c .

$$\vec{J} = -D\nabla c \quad (1)$$

Combinando la ley de Fick con la ley de conservación para la especie c :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (2)$$

Resulta la segunda ley de Fick:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D\nabla^2 c = \frac{\partial c}{\partial t} - D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (3)$$

Las leguminosas estudiadas pueden ser aproximadas, en términos geométricos, a una esfera con diámetros promedio de 14.5 mm y 6.45 mm para el frijón y la arveja, respectivamente [6,7].

Los coeficientes de difusión efectiva se obtuvieron de la solución analítica a la segunda ley de Fick, para la geometría de esfera y en estado inestable, considerando difusión constante en el proceso, humedad inicial uniforme y difusión radial [5]:

$$MR = \frac{M_t - M_\infty}{M_0 - M_\infty} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left[\frac{-De_w n^2 \pi^2 t}{r^2}\right] \quad (4)$$

Donde:

- MR : es el contenido de humedad.
- M_0 : es la humedad inicial.
- M_∞ : es la humedad de equilibrio.
- M_t : es la humedad en el tiempo t
- De_w : es el coeficiente de difusión efectiva (m²/s) del agua
- r : es el radio promedio.
- t : tiempo.
- n : número de términos de la sumatoria.

Para tiempos largos, la ecuación (4) puede ser ajustada para el cálculo de la difusión efectiva:

$$MR = \frac{M_t - M_\infty}{M_0 - M_\infty} = \frac{6}{\pi^2} \exp\left[\frac{-De_w \pi^2 t}{r^2}\right] \quad (5)$$

Según [8] el coeficiente de difusión puede ser calculado de la pendiente del lado izquierdo de la ecuación (5) versus el tiempo:

$$De = \frac{r^2}{\pi^2} \left(\frac{dMR}{dt} \right) \quad (6)$$

Investigadores han demostrado que la temperatura es un factor que afecta la difusividad en agua de los materiales agrícolas. Generalmente la dependencia de la difusividad de la temperatura se describe por el modelo de Arrhenius [4,8,12,13,14]:

$$De = D_o \exp\left[-\frac{E_A}{R_g T_a}\right] \quad (7)$$

Donde:

- D_o : es una constante.
- E_A : energía de activación (KJ/mol).
- R_g : constante universal de los gases (8.314 Jul/mol°K).
- T : temperatura absoluta en grados Kelvin.

El modelo de Peleg (1988) es una propuesta matemática simple, que además de su fácil manejo, ha sido validado en el modelamiento de fenómenos de absorción de agua para una gran cantidad de materiales tales como garbanzos, frijoles rojos, avellana, arroz paddy, sésamo, soya, caupí, maní y hojas de dasheen, razón por la cual fue seleccionado para corroborar su efectividad en la predicción de los tiempos de rehidratación de frijol cargamanto y la arveja seca [1,2,3,4,8,9,10,11,13,14]. A continuación se presenta dicho modelo [12]:

$$M_t = M_o + \frac{t}{K_1 + K_2 t} \quad (8)$$

Donde:

M_t : masa en el tiempo t

M_o : masa inicial

t: tiempo de rehidratación

K_1 : constante de rata de Peleg (%⁻¹)

K_2 : constante de capacidad de Peleg (%⁻¹)

MATERIALES Y MÉTODOS

Como materiales de estudio se utilizaron:

Frijol cargamanto ombbligo amarillo (*Phaseolus Vulgaris L.*) procedente de la zona oriental del departamento de Antioquia, especie nativa de esta región.

Arveja seca (*Pisum sativum*) procedente del estado de Washington de la costa Oeste de los Estados Unidos de Norte América.

Procedimiento:

Las muestras de fríjol y arveja fueron seleccionadas de acuerdo con las normas técnicas colombianas para estos productos [6,7]:

Frijol con diámetro entre 12 a 17 mm y una humedad inicial de 15.6%. Norma Técnica Colombiana NTC 871 [6].

Arveja con diámetro entre 5.4 a 7.5 mm y una humedad inicial de 9.8%.; manualmente se separaron el material extraño y los granos rotos, quebrados y dañados. Norma Técnica Colombiana NTC 791 [7].

El diseño experimental utilizado fue completamente aleatorizado, teniendo como fuente de variación la temperatura del agua de remojo, para cada una de las leguminosas en comento.

Y se procedió de la siguiente manera:

Se depositaron quince (15) gramos de muestra en cada beaker de 250 ml, tres (3) en total, con un contenido de 200 ml de agua desmineralizada.

La rehidratación se realizó a cinco (5) temperaturas distintas 25, 32, 40, 47 y 55°C; los tiempos oscilaron entre diez (10) y cincuenta (50) horas, ver la figura 1.

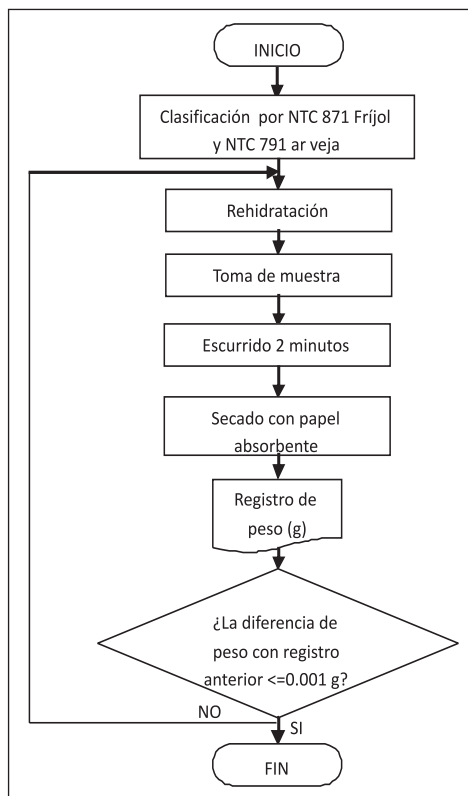


Figura 1. Procedimiento para la rehidratación de los materiales en el laboratorio

Para garantizar la uniformidad de la temperatura se usó un baño de agua termostatado, marca memmert modelo WB 7 con un rango de ajuste de temperatura de 10°C hasta 95°C +/- 0,1°C, de precisión.

Los granos se pesaron en una balanza electrónica, marca mettler-toledo modelo PB 303-S con una precisión de 0.001 gramos para determinar la ganancia de humedad. Realizado este procedimiento, los granos se retornaron al beaker con el agua de remojo.

Esta última operación se repitió hasta que los granos alcanzaron la humedad de equilibrio, la cual se asume cuando el último pesaje no excede una diferencia de 0.001 gramos, con respecto al pesaje anterior [14].

A continuación se relaciona el número de ensayos realizados para cada uno de los materiales a las diferentes temperaturas:

Cuadro 1. Resultados obtenidos durante la experimentación

T (°C)	FRIJOL CARGAMANTO		ARVEJA SECA	
	No. de ensayos	No. De repeticiones	No. de ensayos	No. De repeticiones
25	98	3	98	3
32	55	1	59	1
40	27	3	39	3
47	27	1	33	1
55	27	3	27	3

Resultados y discusión de resultados

Curvas de hidratación:

En las figuras 2 y 3 se muestra de manera gráfica, para el frijol y la arveja, el comportamiento de los materiales estudiados en diferentes temperaturas del agua de hidratación.

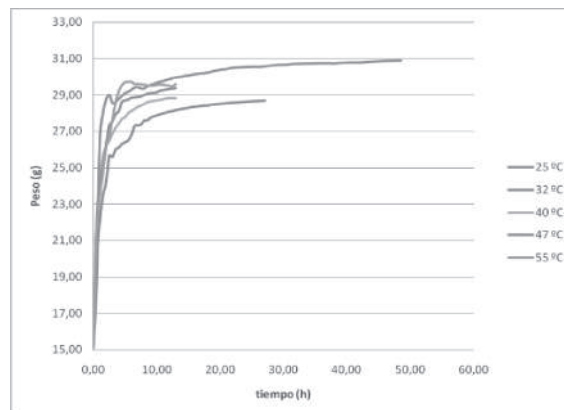


Figura 2. Curva de hidratación del frijol cargamanto a 25, 32, 40, 47 y 55°C

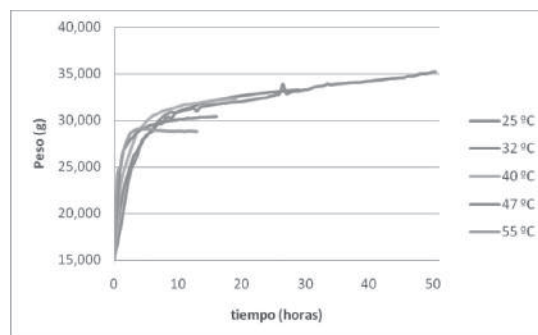


Figura 3. Curva de hidratación de la arveja seca a 25, 32, 40, 47 y 55°C

Las muestras exhibieron un comportamiento típico con un incremento exponencial de su peso, debido al aumento del contenido de agua contra el tiempo de hidratación en todas las temperaturas; mientras el proceso continuaba, la rata de absorción decrecía continuamente debido al llenado con agua de los espacios libres capilares y los espacios intermicelares.

A medida que el llenado del agua decrecía, por la diferencia de concentración entre el medio de hidratación y los granos, la extracción de los sólidos solubles en la dirección reversa al movimiento del agua ofrecía resistencia adicional a la transferencia del agua; la absorción frenó cuando los granos alcanzaron el punto de equilibrio.

En las gráficas para los dos materiales se observa la influencia de la temperatura del agua de remojo tanto para los frijoles como para la arveja. Se encontró que a mayor temperatura, el punto de equilibrio, o sea, el momento que se suspende la entrada de agua a los materiales, se alcanza mucho más rápido. También se encontró que la ganancia de humedad para los dos materiales es menor a medida que la temperatura del agua de hidratación aumenta.

Aplicación de la Ley de Fick:

Para determinar el coeficiente de difusión, a las diversas temperaturas experimentales, se desarrolla la linealización del modelo acorde con lo propuesto en la ecuación (6). A continuación se presenta la tabla con los valores del coeficiente de difusividad a las diferentes temperaturas de experimentación:

Cuadro 2. Cálculo de coeficientes de difusividad a las diversas temperaturas

T (°C)	FRIJOL CARGAMANTO			ARVEJA SECA		
	D_e	R^2	P_{VALUE}	D_e	R^2	P_{VALUE}
25	2,89722E-10	88,6541	0,0000	3,75608E-11	91,5319	0,0000
32	5,85923E-10	96,5435	0,0000	1,06965E-10	90,6167	0,0000
40	1,37780E-09	94,5747	0,0000	1,71917E-10	94,138	0,0000
47	1,16906E-09	95,7396	0,0000	1,97758E-10	96,8269	0,0000
55	1,34835E-09	76,0991	0,0000	3,63679E-10	90,0123	0,0011

De acuerdo con la tabla todos los modelos tienen significancia estadística a un nivel de confianza del 95%; por otro lado, la gran mayoría de R_2 presenta valores mayores a 80% lo que se traduce en un buen nivel de ajuste del modelo.

El coeficiente de difusión es el factor de proporcionalidad que representa la cantidad de sustancia que se difunde a través de una unidad de área mediante un gradiente de concentración en un tiempo dado. De acuerdo con los resultados, el coeficiente de difusión se ve afectado por la temperatura; a medida que esta va aumentando el coeficiente también lo va haciendo para los dos materiales estudiados, lo cual nos indica que presentan una relación de tipo directo.

A continuación procedemos a determinar la energía de activación para cada material de acuerdo con el modelo de Arrhenius, el cual se encuentra consignado en la ecuación (7).

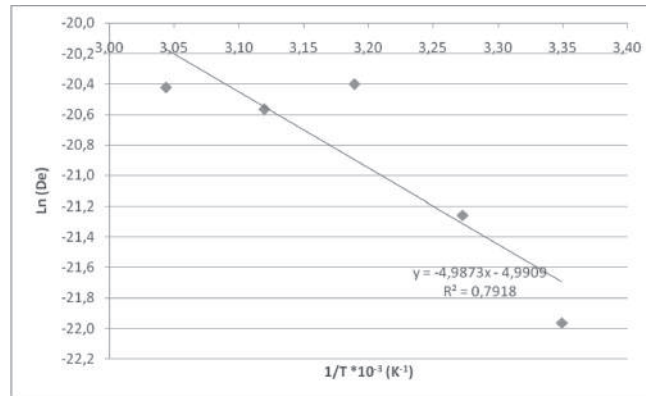


Figura 4. Gráfico de Arrhenius para la difusión efectiva del frijol cargamento

De acuerdo con los resultados determinamos que la energía de activación del frijol cargamento es de 41.464 KJ/mol.

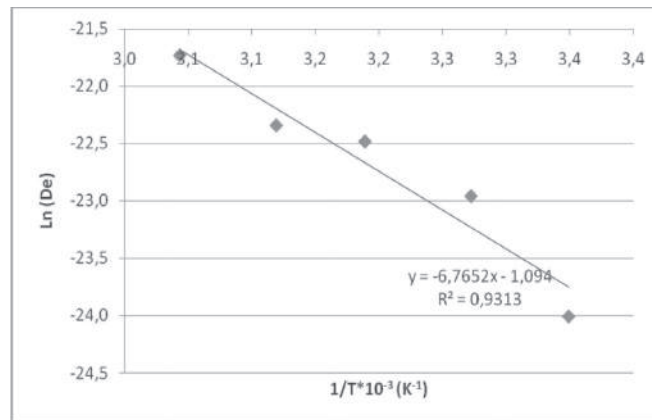


Figura 5. Gráfico de Arrhenius para la difusión efectiva de la arveja seca

Con base en los resultados determinamos que la energía de activación de la arveja seca es de 56.246 KJ/mol.

Aplicación del modelo de Peleg:

A continuación se presentan los resultados de las constantes, K_1 y K_2 , calculadas para los materiales analizados:

Cuadro 3. Valores de regresión para las diversas temperaturas

Material	T(°C)	K ₁	K ₂	F _{calculado}	F _{tabla}	R ²	Error estandarizado
Frijol	25	0.105676	0.0737867	1763457.51	3.94	0.99994	0.00755796
	32	0.0779175	0.0712531	823714.13	4.02	0.99997	0.00449584
	40	0.0432297	0.0690316	280844.21	4.26	0.99991	0.00249077
	47	0.0406523	0.0672082	115116.41	4.26	0.99989	0.00378767
	55	0.0364405	0.0656543	8998.85	4.26	0.99722	0.0132339
Arveja	25	0.188983	0.0474743	33246.45	3.94	0.99715	0.0360375
	32	0.127113	0.0506063	1728433.88	4.02	0.99998	0.00245378
	40	0.0651692	0.0537174	202648.81	4.06	0.99978	0.00537225
	47	0.0383704	0.0625243	482274.0	4.17	0.99997	0.00235122
	55	0.0083816	0.0716503	32306.00	4.26	0.99925	0.00762245

Teniendo en cuenta la tabla, todos los modelos tienen significancia estadística a un nivel de confianza del 95% ya que $F_{calculado} \gg F_{tabla}$; por otro lado, el R^2 es muy aproximado a 1 por lo que se tiene un comportamiento de relación directa en términos de proporcionalidad y de excelente exactitud para describir el modelo. Además, el error estandarizado tiende a 0 lo que nos indica un buen nivel en cuanto a precisión se refiere para el modelo construido.

Se realizó la revisión del cumplimiento de los supuestos del modelo de regresión simple clásico mediante los mínimos cuadrados, asegurando estadísticamente la validez de los modelos construidos.

Constante K₂ del modelo de Peleg:

K₂ es una constante relacionada con la máxima capacidad de absorción de agua; entre más bajo K₂, más alta la capacidad de absorción de agua.

Para el caso de los dos materiales estudiados se observaron efectos contrarios como respuesta al aumento de la temperatura; es decir, para el caso del frijol cargamento esta constante disminuyó al aumentar la temperatura, mientras que para la arveja seca aumentó proporcionalmente con el incremento de la temperatura. Esto nos indica que el efecto de la temperatura en la capacidad de absorción de agua de los materiales alimenticios, para la constante K₂, es combinado y depende del tipo de material y los sólidos solubles perdidos durante la hidratación.

Para poder construir un modelo generalizado a las distintas temperaturas se utilizan los valores promedios para la constante K₂ a las temperaturas de 25, 32, 40, 47 y 55°C para los dos materiales analizados.

Constante K_1 del modelo de Peleg:

A continuación se presenta gráficamente el comportamiento de la constante K_1 para cada material a las diferentes temperaturas del agua de remojo:

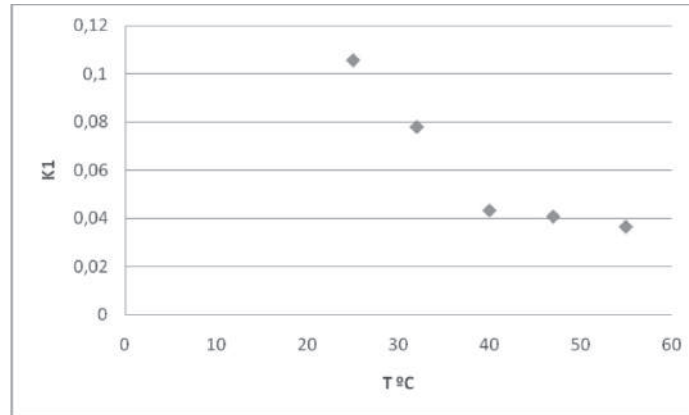


Figura 6. Efecto de la temperatura sobre K_1 del modelo de Peleg para la hidratación de Frijol cargamanto

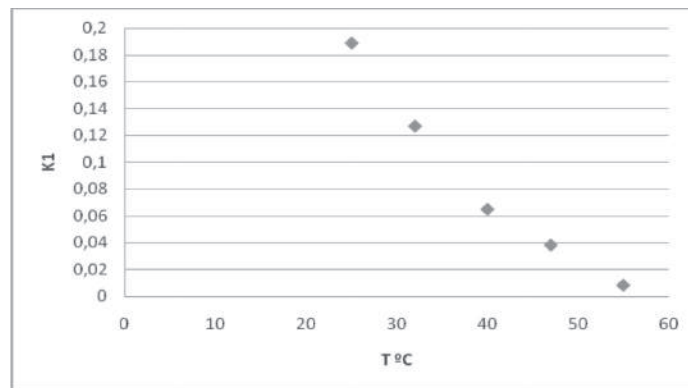


Figura 7. Efecto de la temperatura sobre K_1 del modelo de Peleg para la hidratación de Arveja Seca

K_1 es una constante que se relaciona con la rata de transferencia de masa, por lo tanto a menor valor de K_1 mayor rata inicial de absorción de agua. El decrecimiento de K_1 con el incremento de la temperatura sugiere un correspondiente incremento en la rata inicial de absorción de agua.

Para poder construir una ecuación generalizada para las distintas temperaturas se recurre a un modelo de regresión simple para la constante K_1 en función de las temperaturas de 25, 32, 40, 47 y 55°C para los dos materiales analizados.

Modelo de Peleg generalizado para las diversas temperaturas:

Los modelos generalizados para la ganancia de masa en función de la temperatura y el tiempo de hidratación de los dos materiales, se presentan a continuación:

$$M_t = M_o + \frac{t}{\frac{3.38799}{T} - 0.0311725 + 0.0693868t} \quad \text{Frijol (9)}$$

$$M_t = M_o + \frac{t}{0.3240 - 0.0060T + 0.0572t} \quad \text{Arveja (10)}$$

Donde:

- M_o : masa inicial (g).
- T : temperatura de hidratación (°C).
- t : tiempo de hidratación (h).
- M_t : masa después del tiempo t (g).

A continuación se procedió a validar el modelo generalizado de Peleg, mediante la comparación gráfica de los datos experimentales, contra los calculados con las ecuaciones establecidas para cada material analizado a las diversas temperaturas:

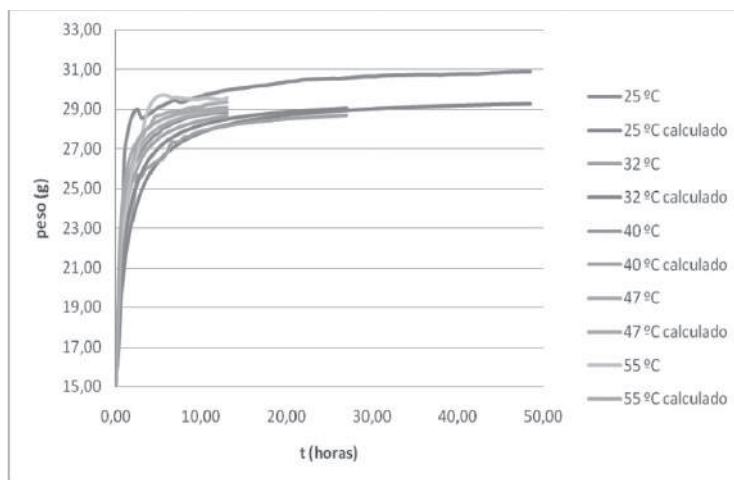


Figura 8. Datos experimentales Vs. datos calculados para la curva de hidratación de frijól cargamanto a las diversas temperaturas

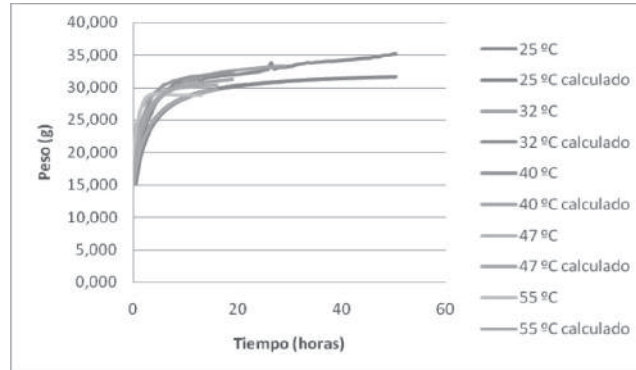


Figura 9. Datos experimentales Vs. datos calculados para la curva de hidratación de arveja seca a las diversas temperaturas

De acuerdo con los gráficos, la ecuación generalizada de Peleg para el fenómeno de hidratación (a las diversas temperaturas) del frijol cargamanto presenta un comportamiento adecuado para las cinco (5) temperaturas experimentales; por lo tanto, el modelo tiene un buen grado de confiabilidad. Por otro lado, para el caso de la arveja seca la ecuación generalizada de Peleg da una buena aproximación para las temperaturas más bajas, pero para las temperaturas altas se visualiza un grado de desviación grande lo que pone en duda la generalización del modelo para dicho material.

CONCLUSIONES

Respecto a la influencia de la temperatura del agua de remojo sobre la rehidratación de los dos materiales, el tiempo de saturación de los elementos se comportó de una manera inversa a la temperatura; es decir, a mayor temperatura menor tiempo de saturación de la hidratación. También se encontró que la ganancia de peso de los materiales es inversamente proporcional a la temperatura.

El coeficiente de difusividad para los materiales analizados presenta una relación de tipo directo con la temperatura del agua de remojo.

De acuerdo con los resultados, la Ley de Fick se ajusta mejor para el modelamiento de la cinética de la arveja que la del frijol, contrario a lo encontrado para el modelo de Peleg.

Se encontraron las energías de activación para el frijol cargamanto y la arveja seca, las cuales fueron respectivamente de 41.464 y 56.246 KJ/mol. Los valores hallados están acordes con los encontrados en la bibliografía referenciada; energías de activación bajas se traducen en una mayor facilidad para que el agua ingrese dentro del material.

La construcción de un modelo generalizado de Peleg para los materiales estudiados que involucra como variables independientes la temperatura y el tiempo de hidratación, resultó viable para el caso de frijol cargamanto, mientras que para la arveja seca se presentaron desviaciones importantes entre los datos experimentales y los calculados con la ecuación propuesta para la temperatura de 55°C. Respecto a la influencia de la temperatura del agua de remojo sobre la rehidratación de los dos materiales, el tiempo de saturación de los elementos se comportó de una manera inversa a la temperatura; es decir, a mayor temperatura menor tiempo de saturación de la hidratación. También se encontró que la ganancia de peso de los materiales es inversamente proporcional a la temperatura.

Para el caso de la constante del modelo K_2 , se observaron efectos contrarios para cada material. Mientras que para el frijol el valor de dicha constante se comportó de manera inversa a la temperatura de remojo, para la arveja el valor disminuyó a medida que aumentaba la temperatura, lo que indica que el efecto de la temperatura en la capacidad de absorción de agua de los materiales alimenticios es combinado y depende de su naturaleza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABU-GHANNAM, Nissreen and McKENNA, Brian. Hydration kinetics of red kidney beans (*Phaseolus vulgaris* L.). En : Journal Of Food Science. Vol. 62, No. 3 (1997); p. 520-523.
- [2] ABU-GHANNAM, Nissreen. Modelling textural changes during the hydration process of red beans. En : Journal Of Food Engineering. No. 38 (1998); p. 341-352.
- [3] ABU-GHANNAM, Nissreen and McKENNA, Brian. The application of Peleg's equation to model water absorption during the soaking of red kidney beans (*Phaseolus vulgaris* L.). En : Journal Of Food Engineering. No. 32 (1997); p. 391-401.
- [4] BANDYOPADHYAY, S. and ROY, N. C. Studies on swelling and hydration of paddy by hot soaking. En : Journal of food science and technology. Vol. 14 (may. – jun. 1977); p.95-98.
- [5] CRANK, J. The mathematics of diffusion. 2a ed. New York: Oxford University Press, 1975, pág 421.
- [6] Instituto Colombiano de Normas Técnicas, ICONTEC. Norma Técnica Colombiana NTC 871- Frijol. Actualización segunda, p. 7, 2005.
- [7] Instituto Colombiano de Normas Técnicas, ICONTEC. Norma Técnica Colombiana NTC 791- Arvejas secas. Actualización segunda, p. 6, 2004.

- [8] KASHANINEJAD, Mahdi et al. Study of hydration kinetics and density changes of rice (Tarom Mahali) during hydrothermal processing. *Journal of Food Engineering*, v 79, p. 1383 -1390, 2007.
- [9] KHAZAEI, Javad y MOHAMMADI, Narjes. Effect of temperature on hydration kinetic of sesame seed. En: *Science direct*. <http://www.sciencedirect.com>.
- [10] LÓPEZ, A.; PIQUÉ, T. y CLOP, M. Modelización de la absorción de agua en la avellana. En : *Alimentaria*. (Dic. 1991); p. 73-76.
- [11] MAHARAJ, V. and SANKAT, C.K. Therehydration characteristics and quality of dehydrated dasheen leaves. En : *Canadian agricultural. Engineering*. Vol. 42, No. 2 (Apr. – may. – jun. 2000); p. 81-85.
- [12] PELEG, Micha. An empirical model for the description of moisture sorption curves. *Journal of Food Science*. v. 53, p. 1216-1217,1219, 1988.
- [13] SOPADE, P.A. and OBEKPA, J.A. Modelling water absorption in soybean, cowpea and peanuts at three temperatures using Peleg's equation. En : *Journal Of Food Science*. Vol. 55, No. 4 (1990); p. 1084-1087.
- [14] TURHAN, Mahir; SAYAR, Sedat and GUNASEKARAN, Sundaram. Application of Peleg model to study water absorption in chickpea during soaking. *Journal Of Food Engineering*. No. 53 (2002); p. 153-159.